CORSO DI TOPOGRAFIA A - A.A. 2005-2006

ESERCITAZIONE - 05-08.06.06

METODO DELLE OSSERVAZIONI INDIRETTE

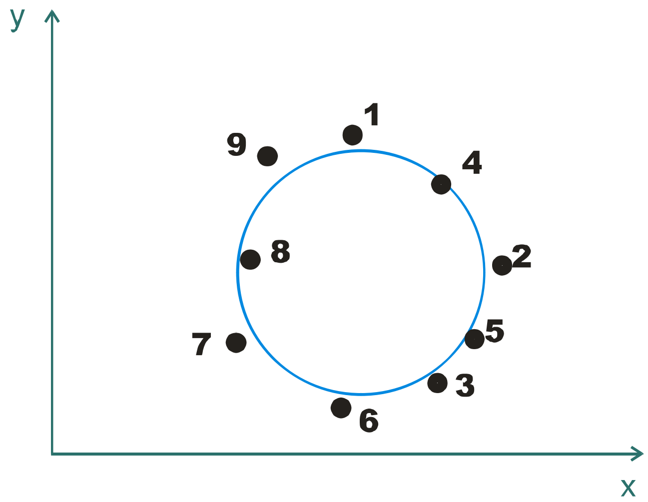
Esercizio tratto da Monti, Pinto, *Trattamento dei dati topografici e cartografici,* Clup

ESERCIZIO 3

Si supponga di avere determinato dei punti lungo un contorno circolare e di volere così trovare il cerchio interpolante ai minimi quadrati.

9 punti rilevati in modo indipendente e con ugual precisione in un opportuno sistema di riferimento; le loro coordinate valgono:

1 (4; 6.5)
2 (6.5; 4.5)
3 (5.5; 1.5)
4 (5.8; 5.8)
5 (6.4; 3)
6 (3.6; 0.7)
7 (1.5; 1.7)
8 (1.1; 3.5)
9 (1.6; 5.6)



L'equazione di una circonferenza è:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

il cui centro è situato in ($x_0 = -\frac{a}{2}$; $y_0 = -\frac{b}{2}$) ed il cui raggio vale
r = $\sqrt{x_0^2+y_0^2-c}$.

Scriviamo un'equazione ∀ punto assegnato, isolando i termini noti l_i:

$l_1 = x1^2 + y1^2 = 58.25$

$l_2 = x2^2 + y2^2 = 62.5$

$l_3 = x3^2 + y3^2 = 32.5$

$l_4 = x4^2 + y4^2 = 67.28$

$l_5 = x5^2 + y5^2 = 49.96$

$l_6 = x6^2 + y6^2 = 13.45$

$l_7 = x7^2 + y7^2 = 5.14$

$l_8 = x8^2 + y8^2 = 13.46$

$l_9 = x9^2 + y9^2 = 33.92$

Vettore misure:

$l = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, l_8, l_9\}^T$

Equazioni risolutive:

$4a + 6.5b + c + l_1 = v_1$

$6.5a + 4.5b + c + l_1 = v_2$

$5.5a + 1.5b + c + l_1 = v_3$

$5.8a + 5.8b + c + l_1 = v_4$

$6.4a + 3b + c + l_1 = v_5$

$3.6a + 0.7b + c + l_1 = v_6$

$1.5a + 1.7b + c + l_1 = v_7$

$1.1a + 3.5b + c + l_1 = v_8$

$1.6a + 5.6b + c + l_1 = v_9$

Matrice disegno:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6.5 & 1 \\ 6.5 & 4.5 & 1 \\ 5.5 & 1.5 & 1 \\ 5.8 & 5.8 & 1 \\ 6.4 & 3 & 1 \\ 3.6 & 0.7 & 1 \\ 1.5 & 1.7 & 1 \\ 1.1 & 3.5 & 1 \\ 1.6 & 5.6 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice normale:

$$\mathbf{N = A^T A =} \begin{pmatrix} 182.08 & 134.22 & 36. \\ 134.22 & 154.38 & 32.8 \\ 36. & 32.8 & 9. \end{pmatrix}$$

Determinante di N = 182.08 (154.38 9-32.8^2)-134.22 (134.22 9-32.8 36)+36 (134.22 32.8-154.38 36) = 11859

H = inversa della matrice normale N

$$\mathbf{H} = \frac{1}{11859} \begin{pmatrix} 313.58 & -27.18 & -1155.26 \\ -27.18 & 342.72 & -1140.3 \\ -1155.26 & -1140.3 & 10094.5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.0264423 & -0.00229192 & -0.0974163 \\ -0.00229192 & 0.0288995 & -0.0961548 \\ -0.0974163 & -0.0961548 & 0.851207 \end{pmatrix}$$

Vettore normale:

$$\mathbf{n = A^{\mathit{T}} l =} \begin{pmatrix} 1653.18 \\ 1503.94 \\ 336.46 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

$$\mathbf{x = -\,H\cdot n}$$

$$= -\begin{pmatrix} 0.0264423 & -0.00229192 & -0.0974163 \\ -0.00229192 & 0.0288995 & -0.0961548 \\ -0.0974163 & -0.0961548 & 0.851207 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1653.18 \\ 1503.94 \\ 336.46 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{a} = -7.49012 \\ \hat{b} = -7.32198 \\ \hat{c} = 19.2606 \end{pmatrix}$$

Coordinate del centro della circonferenza:

$$x_0 = -\,\frac{a}{2} = -\,\frac{-7.49012}{2} = 3.74506$$

$$y_0 = -\,\frac{b}{2} = -\,\frac{-7.32198}{2} = 3.66099$$

Raggio della circonferenza:

$$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - c} = 2.85793$$

Vettore degli scarti:

$$\mathbf{v = A\,x + l} = \begin{pmatrix} -0.0427665 \\ 0.125904 \\ -0.418038 \\ 0.630411 \\ -0.682113 \\ 0.620767 \\ 0.71803 \\ -1.14549 \\ 0.193294 \end{pmatrix}$$

Varianza di peso unitario a posteriori:

$$\hat{\sigma}_0{}^2 = \frac{v^T\,v}{6} = 0.550926$$

Varianza dei parametri:

$$\sigma_a{}^2 = \hat{\sigma}_0{}^2 \cdot h_{11} = 0.550926 \cdot 0.0264423 = 0.014567$$

$$\sigma_b{}^2 = \hat{\sigma}_0{}^2 \cdot h_{22} = 0.550926 \cdot 0.0288995 = 0.0159215$$

$$\sigma_c{}^2 = \hat{\sigma}_0{}^2 \cdot h_{33} = 0.550926 \cdot 0.851207 = 0.468952$$

Calcolo della varianza dei parametri geometrici x_0, y_0, r.
In notazione matriciale:

$$\mathbf{C_{xyr} = J_c \cdot C_{abc} \cdot J_c{}^t}$$

dove le relazioni geometriche sono:

$$x_0 = -\frac{a}{2} = 3.74506$$

$y_0 = -\frac{b}{2} = 3.66099$

$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - c} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4} - c} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = 0.5\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = 2.85793$

Costruzione della matrice Jacobiana:

$j_{11} = -\frac{1}{2}$

$j_{12} = 0$

$j_{13} = 0$

$j_{21} = 0$

$j_{22} = -\frac{1}{2}$

$j_{23} = 0$

$j_{31} = 0.5\frac{2a}{2\sqrt{a^2+b^2-4c}} = \frac{a}{2\sqrt{a^2+b^2-4c}} = \frac{a}{4 \cdot 0.5\sqrt{a^2+b^2-4c}} = \frac{a}{4r} = -0.655206$

$j_{32} = \ldots = \frac{b}{4r} = -0.640498$

$j_{33} = 0.5\frac{-4}{2\sqrt{a^2+b^2-4c}} = \frac{-0.5}{r} = -\frac{1}{2r} = -0.174952$

Matrice Jacobiana $J_C = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ -0.655206 & -0.640498 & -0.174952 \end{pmatrix}$

$J_C{}^T = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & -0.65521 \\ 0 & -0.5 & -0.64045 \\ 0 & 0 & -0.17495 \end{pmatrix}$

Matrice di covarianza $C_{abc} = \hat{\sigma}_0^2$ H

$$= 0.550926 \begin{pmatrix} 0.0264423 & -0.00229192 & -0.0974163 \\ -0.00229192 & 0.0288995 & -0.0961548 \\ -0.0974163 & -0.0961548 & 0.851207 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.0145677 & -0.00126268 & -0.0536692 \\ -0.00126268 & 0.0159215 & -0.0529742 \\ -0.0536692 & -0.0529742 & 0.468952 \end{pmatrix}$$

Matrice di covarianza C_{xyr}

$$= J_c.C_{abc}.J_{ct} = \begin{pmatrix} 0.00364193 & -0.00031567 & -0.00032659 \\ -0.00031567 & 0.00398037 & 0.0000508749 \\ -0.00032659 & 0.0000508749 & 0.00190302 \end{pmatrix}$$

In definitiva:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{0.00364193} = 0.0603484$$

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2} = \sqrt{0.00398037} = 0.0630901$$

$$\sigma_r = \sqrt{\sigma_r^2} = \sqrt{0.00190302} = 0.0436237$$

si conclude che:

$x_0 = 3.745 \pm 0.060$

$y_0 = 3.660 \pm 0.063$

$r = 2.858 \pm 0.044$.

Esercizi tratti da Brovelli, Migliaccio, *Trattamento statistico dei dati,* Clup

ESERCIZIO 4

L'operazione di misura che permette di determinare il dislivello tra due punti si chiama livellazione. Si sia osservata, con misure indipendenti, una rete di livellazione ottenendo i seguenti risultati:

$Y_{o1} = q_{12} = 2.853$ cm

$Y_{o2} = q_{23} = 4.967$ cm

$Y_{o3} = q_{13} = 7.825$ cm

$Y_{o4} = q_{24} = 8.426$ cm

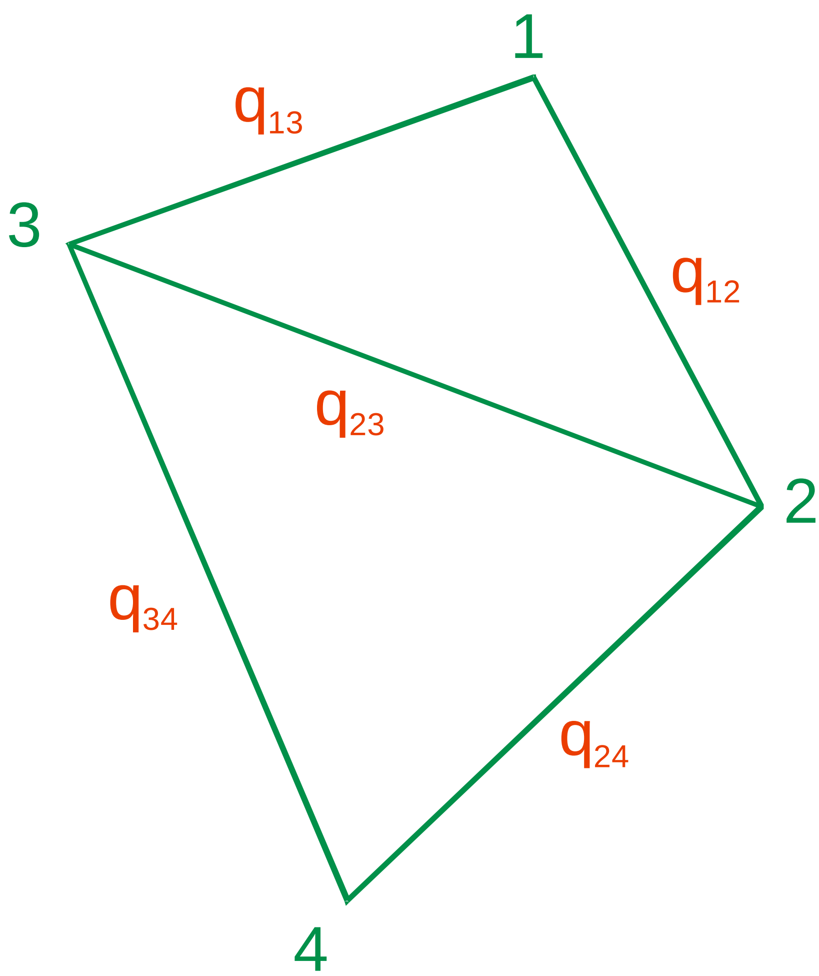
$Y_{o5} = q_{34} = 3.452$ cm

Tutti i dislivelli abbiano la stessa varianza, pari a σ_0^2*, tranne il dislivello* q_{23} *per il quale si abbia una varianza pari* $\frac{1}{2}\sigma_0^2$*, essendo derivato dalla media di due osservazioni.*

a) si compensino le osservazioni cercando le stime m.q. $\hat{Y}_i$ *e* $\hat{\sigma}_0^2$*,avvalendosi delle equazioni pure.*

b) si scrivano le equazioni parametriche introducendo il vettore delle quote $x = \{Q_2, Q_3, Q_4\}$*, supponendo* $Q_1 = 0$*; si trovi la stima m.q.* $\hat{x}$*,* $\hat{\sigma}_0^2$ *e* $C_{\hat{x}\hat{x}}$*.*

c) si verifichi che $\hat{Y} = A\,\hat{x}$ *coincida con lo stimatore trovato al punto a) e la coicidenza delle due stime* $\hat{\sigma}_0^2$*.*



a. Svolgimento con equazioni di condizione
(equazioni pure, metodo delle osservazioni dirette)

la nostra variabile casuale è

$$Y = \begin{pmatrix} q_{12} = 2.853 \\ q_{23} = 4.967 \\ q_{13} = 7.825 \\ q_{24} = 8.426 \\ q_{34} = 3.452 \end{pmatrix}$$

le cui componenti sono quantità osservate
e della quale abbiamo a disposizione un' estrazione.
Se gli errori sono puramente accidentali,
si possono imporre le seguenti equazioni di condizione,
date dalle chiusure dei due anelli 123 e 234 :

*A*nello 123 : $q_{12} + q_{23} + q_{31} = 0$

cioè

$q_{12} + q_{23} - q_{13} = 0$

Anello 234 : $q_{23} + q_{34} + q_{42} = 0$

$q_{23} + q_{34} - q_{24} = 0$

che in forma sintetica si esprimono come : $B\,\overline{Y} = 0$

a .1 Determiniamo B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per Y misurato si ha in generale $BY = \mathbf{b_{oss}} \neq \mathbf{b = 0}$

Si vuole dare una stima $\hat{Y}$ di $\overline{Y}$ che tenga conto delle informazioni che provengono dal vettore delle osservazioni Y e dalle relazioni di vincolo

Dalla teoria dei minimi quadrati si ha

$$\hat{Y} = Y - v = Y - B^T \left(BB^T\right)^{-1} BY$$

se la matrice dei pesi non e' l' identità

$$\hat{Y} = Y - v = Y - P^{-1} B^T \left(B\,P^{-1} B^T\right)^{-1} BY$$

La matrice dei pesi $P = \dfrac{1}{\sigma_0{}^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La sua inversa $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{BY} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{12} \\ q_{23} \\ q_{13} \\ q_{24} \\ q_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.853 \\ 4.967 \\ 7.825 \\ 8.426 \\ 3.452 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.005 \\ -0.007 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 & 0.5 \\ 0.5 & 2.5 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\mathbf{B}\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right) = 6$$

$$\mathbf{k}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.416667 & -0.0833333 \\ -0.0833333 & 0.416667 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{k}^{-1}\,\mathbf{BY} = \begin{pmatrix} 0.416667 & -0.0833333 \\ -0.0833333 & 0.416667 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.005 \\ -0.007 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0015 \\ -0.0025 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{B}\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{BY} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.0015 \\ -0.0025 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0015 \\ -0.002 \\ 0.0015 \\ 0.0025 \\ -0.0025 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} - \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{B}\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{BY}$$

$$\hat{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} 2.853 \\ 4.967 \\ 7.825 \\ 8.426 \\ 3.452 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.0015 \\ -0.002 \\ 0.0015 \\ 0.0025 \\ -0.0025 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.8545 \\ 4.969 \\ 7.8235 \\ 8.4235 \\ 3.4545 \end{pmatrix} \mathbf{cm}$$

$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} - \mathbf{v}$ **quindi** $\mathbf{v} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}$

$$\mathbf{v} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} 2.853 \\ 4.967 \\ 7.825 \\ 8.426 \\ 3.452 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2.8545 \\ 4.969 \\ 7.8235 \\ 8.4235 \\ 3.4545 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0015 \\ -0.002 \\ 0.0015 \\ 0.0025 \\ -0.0025 \end{pmatrix} \mathbf{cm}$$

Varianza a posteriori di peso unitario (m è qui il numero delle equazioni indipendenti, che è pari alla ridondanza del sistema; le misure sono 5)

$$\hat{\sigma}_0{}^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P}\, \mathbf{v}}{2} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -0.0015 & -0.002 & 0.0015 & 0.0025 & -0.0025 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0.0015 \\ -0.002 \\ 0.0015 \\ 0.0025 \\ -0.0025 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\, 0.000025 = 0.0000125\, \mathrm{cm}^2$$

b. Svolgimento con parametri aggiuntivi

Esprimiamo q_{ij} in funzione della differenza delle quote ΔQ_{ji} $(Q_1 = 0)$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} q_{12} = Q_2 - Q_1 \\ q_{23} = Q_3 - Q_2 \\ q_{13} = Q_3 - Q_1 \\ q_{24} = Q_4 - Q_2 \\ q_{34} = Q_4 - Q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{12} = Q_2 \\ q_{23} = Q_3 - Q_2 \\ q_{13} = Q_3 \\ q_{24} = Q_4 - Q_2 \\ q_{34} = Q_4 - Q_3 \end{pmatrix}$$

Le quantità osservabili Y sono legate linearmente ai parametri Q_i

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} q_{12} = Q_2 \\ q_{23} = Q_3 - Q_2 \\ q_{13} = Q_3 \\ q_{24} = Q_4 - Q_2 \\ q_{34} = Q_4 - Q_3 \end{pmatrix} = \mathbf{Ax}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

nel sistema $\mathbf{Ax} - \mathbf{Y} = -\mathbf{v}$ (a lezione si è usato $\mathbf{Ax} + \boldsymbol{l} = \mathbf{v}$)

le nuove incognite sono i parametri $\mathbf{x} = (Q_i)$

$$\mathbf{P} = \sigma_0{}^{-2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La formula generale in questo caso è $A\,\hat{x} = \hat{Y} = Y - v = A\left(A^T P A\right)^{-1} A^T P Y$

$$A^T PA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinante $\left(N = A^T PA\right) = 12$

$$H = \left(A^T PA\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{12} & \frac{7}{12} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T PY = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.853 \\ 4.967 \\ 7.825 \\ 8.426 \\ 3.452 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15.507 \\ 14.307 \\ 11.878 \end{pmatrix}$$

$$\hat{x} = H \cdot A^T PY = \begin{pmatrix} 2.8545 \\ 7.8235 \\ 11.278 \end{pmatrix} \text{cm}$$

La stima di Y è $A\,\hat{x} = \hat{Y}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \hat{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.8545 \\ 7.8235 \\ 11.278 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.8545 \\ 4.969 \\ 7.8235 \\ 8.4235 \\ 3.4545 \end{pmatrix}$$

$-v = A\,\hat{x} - Y$

$$v = -\begin{pmatrix} 2.8545 \\ 4.969 \\ 7.8235 \\ 8.4235 \\ 3.4545 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.853 \\ 4.967 \\ 7.825 \\ 8.426 \\ 3.452 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0015 \\ -0.002 \\ 0.0015 \\ 0.0025 \\ -0.0025 \end{pmatrix} \text{cm}$$

Null

La varianza a posteriori di peso unitario
(**qui la ridondanza r è data dal numero di equazioni – il numero delle incognite**)

$$\hat{\sigma}_0{}^2 = \frac{v^T P v}{2} = \begin{pmatrix} -0.0015 & -0.002 & 0.0015 & 0.0025 & -0.0025 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.0015 \\ -0.002 \\ 0.0015 \\ 0.0025 \\ -0.0025 \end{pmatrix} = 0.0000125\,\text{cm}^2$$

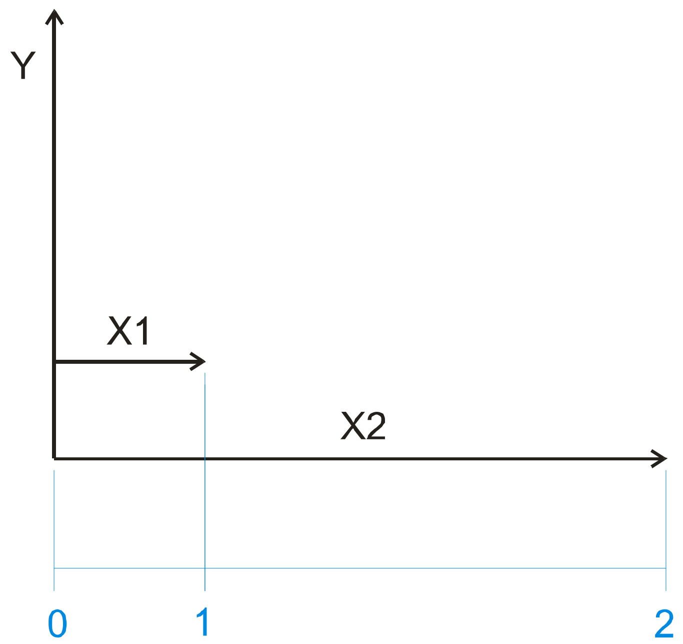
$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\hat{\sigma}_0{}^2} = \sqrt{0.0000125} = 3.53553 \cdot 10^{-3}\ \text{cm}$$

Esercizio tratto da Monti, Pinto, *Trattamento dei dati topografici e cartografici,* Clup

ESERCIZIO 5

Siano misurate tutte le possibili distanze (in andata e ritorno) tra tre punti allineati 0, 1 e 2.:

$d_{01} = 10.00\ m$
$d_{02} = 50.00\ m$
$d_{10} = 10.01\ m$
$d_{12} = 40.00\ m$
$d_{20} = 50.01\ m$
$d_{21} = 39.98\ m$



Siano assegnate le deviazioni standard:

$\sigma_{d01} = \sigma_{d10} = 1$ *mm*
$\sigma_{d02} = \sigma_{d12} = \sigma_{d20} = \sigma_{d21} = 3.16$ *mm*

Si determinino:
1) i valori più probabili di x_1 *e* x_2*;*
2) il coefficiente di correlazione lineare tra x_1 *e* x_2*.*

Scrittura delle equazioni del sistema.

Scelto il sistema di riferimento monodimensionale illustrato in figura, le equazioni di osservazione sono:

$$
\begin{gathered}
x_1 - d_{01} = v_1 \\
x_2 - d_{02} = v_2 \\
x_1 - d_{10} = v_3 \\
x_2 - x_1 - d_{12} = v_4 \\
x_2 - d_{20} = v_5 \\
x_2 - x_1 - d_{21} = v_6
\end{gathered}
$$

Costruzione della matrice dei pesi.

$$P_i = \frac{\sigma_0{}^2}{\sigma_i{}^2}$$

Se scegliamo $\sigma_0{}^2 = 10$, essendo $\sigma_{d01}{}^2 = \sigma_{d10}{}^2 = 1$ mm^2 e $\sigma_{d02}{}^2 = \sigma_{d12}{}^2 = \sigma_{d20}{}^2 = \sigma_{d21}{}^2 = (3.16)^2$ mm^2 = 9.99 mm^2, si ottiene una matrice P così fatta:

$$P = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Risoluzione del sistema normale.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Il sistema A x + l = v è già lineare.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Misure} = \begin{pmatrix} -10 \\ -50 \\ -10.01 \\ -40 \\ -50.01 \\ -39.98 \end{pmatrix}$$

La soluzione è data da x=$-(A^t\, P\, A)^{-1}\, A^t\, P\, l$ **.**

Valutiamo la matrice nornale N = $A^t\, P\, A$, il vettore $A^t\, P\, l$ ed il loro prodotto.

$$\mathbf{N} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 22 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinante della matrice Normale = 84

H = Inversa della Normale = $\begin{pmatrix} \frac{1}{21} & \frac{1}{42} \\ \frac{1}{42} & \frac{11}{42} \end{pmatrix}$

Vettore Normale = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 \\ -50 \\ -10.01 \\ -40 \\ -50.01 \\ -39.98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -120.12 \\ -179.99 \end{pmatrix}$

Vettore soluzione = - $\begin{pmatrix} 22 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -120.12 \\ -179.99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.0055 \\ 50.0002 \end{pmatrix}$

Vettore residui = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10.0055 \\ 50.0002 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ -50 \\ -10.01 \\ -40 \\ -50.01 \\ -39.98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00547619 \\ 0.000238095 \\ -0.00452381 \\ -0.0052381 \\ -0.0097619 \\ 0.0147619 \end{pmatrix}$

Calcolo delle varianze.

Calcoliamo la varianza dell'unità di peso a posteriori $\hat{\sigma}_0{}^2$:

$$\hat{\sigma}^2{}_0 = \frac{\mathbf{v}^t\, \mathbf{P}\, \mathbf{v}}{\mathbf{n} - \mathbf{m}}$$

nel nostro caso (n-m) = 4.

Varianza di peso unitario a posteriori = $\frac{1}{4} v^t P v$

$$= \frac{1}{4} v^t \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.00547619 \\ 0.000238095 \\ -0.00452381 \\ -0.0052381 \\ -0.0097619 \\ 0.0147619 \end{pmatrix} = 0.00021131$$

Varianza x1 = $\hat{\sigma}_0{}^2$ h11 = 0.00021131 $\frac{1}{21}$ = 0.0000100624

Varianza x2 = $\hat{\sigma}_0{}^2$ h22 = 0.00021131 $\frac{11}{42}$ = 0.0000553431

$$\text{DevStd x1} = \sqrt{\text{Varianza x1}} = \sqrt{0.0000100624} = 0.00317213$$

$$\text{DevStd x2} = \sqrt{\text{Varianza x2}} = \sqrt{0.0000553431} = 0.00743929$$

Calcolo della correlazione tra x_1 e x_2.

Covarianza x1x2= $\hat{\sigma}_0{}^2$ h12 = 0.00021131 $\frac{1}{42}$ = 5.03119×10^{-6}

$$\text{Correlazione x1x2} = \frac{\text{Covarianza x1x2}}{\text{DevStd x1 DevStd x2}} = \frac{5.03119 \times 10^{-6}}{0.00317213 \cdot 0.00743929} = 0.213201$$

Variante.

Cosa cambierebbe se, anziché usare tutte le osservazioni indipendenti, si impiegassero i valori medi delle misure corrispondenti?

Verifichiamo:

$$\overline{\mathbf{d}}_{01} = \mathbf{Media}[\{\mathbf{d}_{01}, \mathbf{d}_{10}\}] = \mathbf{10.005\,m}$$
$$\overline{\mathbf{d}}_{02} = \mathbf{Media}[\{\mathbf{d}_{02}, \mathbf{d}_{20}\}] = \mathbf{50.005\,m}$$
$$\overline{\mathbf{d}}_{12} = \mathbf{Media}[\{\mathbf{d}_{12}, \mathbf{d}_{21}\}] = \mathbf{39.99\,m}$$

Le deviazioni standard divengono:

$\sigma_{\overline{d}\,01} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **mm**

$\sigma_{\overline{d}\,02} = \sigma_{\overline{d}\,12} = 3.16\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ **mm**

In analogia a quanto fatto prima, costruiamo la matrice dei pesi scegliendo la varianza di peso unitario in modo che i pesi siano ancora 10 e 1 ($\sigma_0{}^2$=5):

Nuova P = $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Le nuove equazioni sono:

$$x_1 - \overline{d}_{01} = v_1$$
$$x_2 - \overline{d}_{02} = v_2$$
$$x_2 - x_1 - \overline{d}_{12} = v_3$$

Nuova A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Nuovo l = $\begin{pmatrix} -10.005 \\ -50.005 \\ -39.990 \end{pmatrix}$

Nuova N = $\begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Nuovo Vettore Normale = $\begin{pmatrix} -60.06 \\ -89.995 \end{pmatrix}$

Nuova Matrice H = $\begin{pmatrix} \frac{2}{21} & \frac{1}{21} \\ \frac{1}{21} & \frac{11}{21} \end{pmatrix}$ **(è raddoppiata rispetto alla vecchia H)**

Nuovo Vettore Soluzione = $\begin{pmatrix} 10.0055 \\ 50.0002 \end{pmatrix}$

Nuovo Vettore Residui = $\begin{pmatrix} 0.00047619 \\ -0.0047619 \\ 0.0047619 \end{pmatrix}$

Le nuove varianze sono diminuite:

Varianza di peso unitario a posteriori = $\hat{\sigma}_0{}^2$ **= 0.000047619 (la ridondanza adesso è 1;** $\hat{\sigma}_0{}^2$ **è diminuita)**

Varianza x1 = $\hat{\sigma}_0{}^2$ **h11 = 4.53515** $\times 10^{-6}$

Varianza x2 = $\hat{\sigma}_0{}^2$ **h22 = 0.0000249433**

$\textbf{DevStd x1} = \sqrt{\textbf{Varianza x1}} = \textbf{0.00212959}$

$\textbf{DevStd x2} = \sqrt{\textbf{Varianza x2}} = \textbf{0.00499433}$

Covarianza x1x2 = $\hat{\sigma}_0{}^2$ **h12 = 2.26757** $\times 10^{-6}$

$\textbf{Correlazione x1x2} = \dfrac{\textbf{Covarianza x1x2}}{\textbf{DevStd x1 DevStd x2}} = \textbf{0.213201}$ **(la correlazione non cambia)**

Non cambia nulla nei parametri incogniti. Quello che cam-

bia è la matrice di varianza-covarianza dei parametri: le nuove osservazioni sono maggiormente precise.