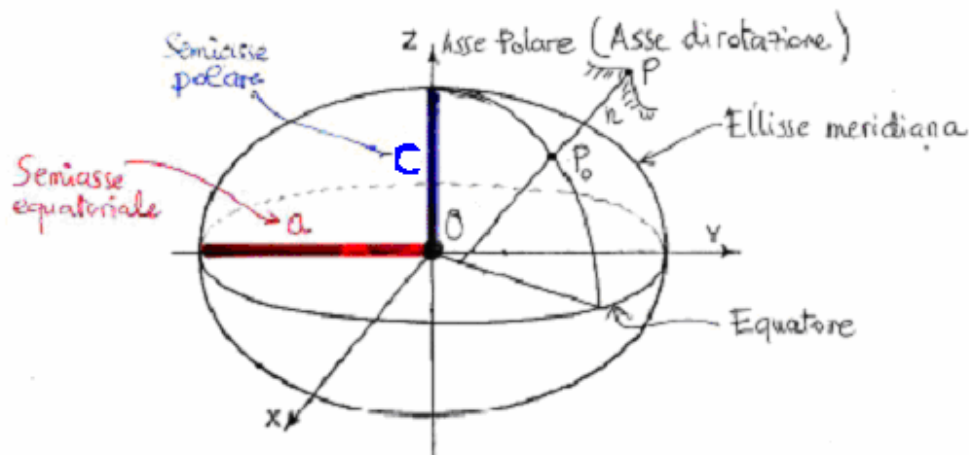


CORSO DI TOPOGRAFIA A - A.A. 2006-2007
ESERCITAZIONI - 09.05.07
ALLEGATO al file [Esercizi di geodesia](#)

Ellissoide terrestre

Fin dalla seconda metà del XVII secolo (su proposta di Newton) la superficie più adatta a essere assunta come superficie di riferimento per la Terra è stata individuata in un **ELLISSOIDE DI ROTAZIONE**.
E' la superficie di riferimento internazionalmente adottata, generata dalla rotazione di un'ellisse (detta **ellisse meridiana**, di semiassi a , c) attorno all'asse minore (asse polare). Vedi [Figura1](#). Un ellissoide di rotazione è definito dall'equazione:

Figura 1



$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

nella quale

$$r^2 = X^2 + Y^2$$

Definiscono univocamente l'ellissoide due parametri geometrici: l'ellissoide risulta definito assegnando i valori dei due semiassi a , c oppure un semiassi e un dei parametri dimensionali α e^2 e e'^2 :

- a = semiassi maggiore**
- c = semiassi minore**
- α = schiacciamento**
- e^2 = (prima) eccentricità**
- e'^2 = seconda eccentricità**

$$\alpha = \frac{a - c}{a}$$

$$e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2}$$

$$e'^2 = \frac{a^2}{c^2} - 1$$

Parametri degli ellissoidi maggiormente utilizzati:

Ellissoide	a [m]	α	c [m]	e^2
WGS84	6378137	1/298,257223563	6356752,314	$6,694379990 \times 10^{-3}$
HAYFORD	6378388	1/297	6356911,946	$6,7226700022 \times 10^{-3}$
BESSEL	6377397,155	1/299,1528128	6356078,963	$6,674372232 \times 10^{-3}$

Si dicono **MERIDIANI** le sezioni piane (ellissi tutte uguali) ottenute secondo l'ellissoide con piani passanti per l'asse polare.

Si dicono **PARALLELI** le sezioni piane (circonferenze) ottenute secondo l'ellissoide con piani paralleli al piano equatoriale.

COORDINATE GEOGRAFICHE ELLISSOIDICHE

Sono due parametri (angoli) atti a definire univocamente la posizione planimetrica di un punto P sull'ellissoide terrestre.

Latitudine φ = Angolo compreso tra la normale ellissoidica per P e il piano equatoriale, contato verso nord (latitudine N) o verso sud (latitudine S).

Risulta:

$$0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ \text{ N}$$

$$0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ \text{ S}$$

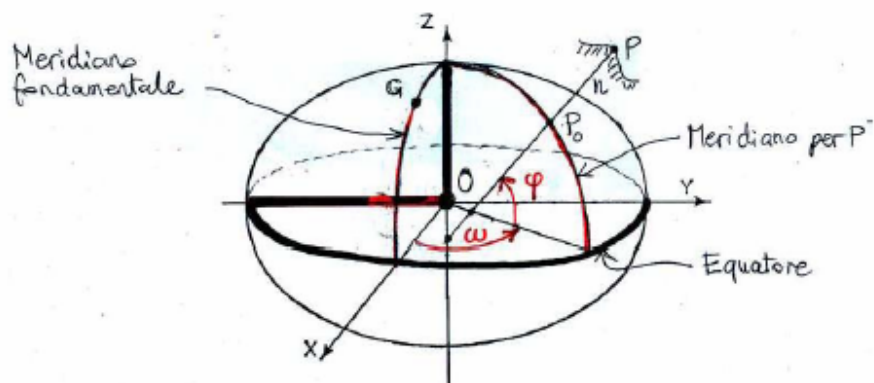
Longitudine λ = Angolo compreso tra il piano del meridiano per P e il piano del meridiano fondamentale (Greenwich o M.Mario), contato verso est (longitudine E) o verso ovest (longitudine W).

Risulta:

$$0^\circ \leq \lambda \leq 360^\circ \text{ E}$$

$$0^\circ \leq \lambda \leq 360^\circ \text{ W}$$

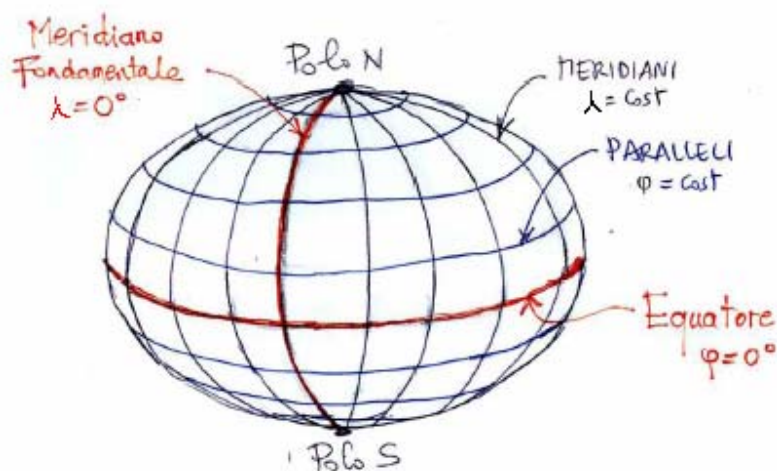
Figura 2



RETICOLATO GEOGRAFICO

Lungo i paralleli: $\varphi = \text{cost}$

Lungo i meridiani: $\lambda = \text{cost}$



Le due famiglie di curve costituiscono il reticolato geografico. Si intersecano con angoli retti (sist. ortogonale). Vedi Figura3.

COORDINATE GEOGRAFICHE ASTRONOMICHE

Hanno definizione analoga a quelle ellissoidiche ma considerando la **verticale** (normale al geoide) in luogo della normale ellissoidica, il piano equatoriale astronomico (normale all'asse polare astronomico) e i meridiani astronomici si determinano con misure di geodesia astronomica (effettuate rispetto alle stelle "fisse").

Gli scostamenti tra coordinate geografiche astronomiche ed ellissoidiche sono pari alle componenti Nord e Est della **deviazione della verticale** (angolo tra verticale e normale ellissoidica):

$$\Delta\varphi = \varphi_a - \varphi_e$$

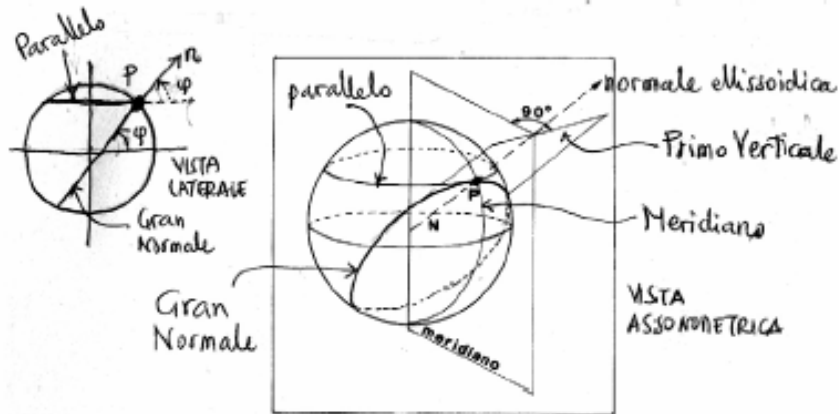
$$\Delta\lambda = \lambda_a - \lambda_e$$

SEZIONI NORMALI PRINCIPALI SULL'ELLISSOIDE

I MERIDIANI sono sezioni normali principali dato che ogni piano meridiano è un piano di simmetria. La seconda sezione normale principale si ottiene con un piano normale all'ellissoide e perpendicolare al meridiano, detto

PRIMO VERTICALE. GRAN NORMALE è il nome del suo raggio di curvatura (vedi Figura4).

Figura 4



Dall'equazione dell'ellisse meridiana dell'ellissoide di rotazione, essendo

$$r = \frac{a \cdot \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}} = \frac{a \cdot \cos \varphi}{W}$$

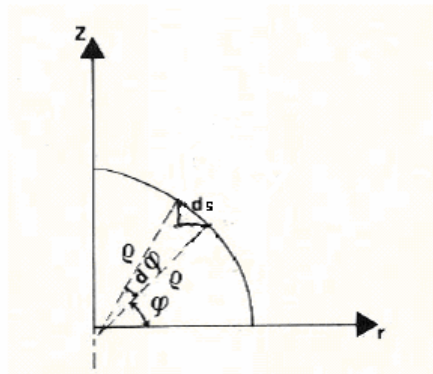
$$Z = \frac{a \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}} = \frac{a \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi}{W}$$

La prima espressione indica il **raggio del parallelo** in funzione della latitudine φ e dei parametri dell'ellissoide.

Il **raggio di curvatura del meridiano** in un punto è $R_1 = \rho$.

Poiché $\rho d\varphi = ds$ (Figura5) $ds = \sqrt{dr^2 + dZ^2}$, si ottiene

Figura 5



da cui si ottiene **derivando**

$$ds = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi)^{3/2}} \cdot d\varphi$$

e quindi

$$\rho = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi)^{3/2}}$$

Il **raggio di curvatura del primo verticale** (detto **Gran Normale N**) si ottiene applicando al primo verticale e al parallelo il teorema di Meusnier:

$$R_2 = N = \frac{r}{\cos \varphi} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi}} = \frac{a}{W}$$

Si dimostra che N è sempre maggiore o uguale a ρ (uguale solo ai poli dove il primo verticale coincide col meridiano, altrimenti sempre maggiore).

SEZIONI NORMALI QUALSIASI SULL'ELLISSOIDE

La Formula di Eulero fornisce il raggio di curvatura di una **sezione normale qualsiasi** avente azimut α .

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{R_1} + \frac{\text{sen}^2 \alpha}{R_2} = \frac{\cos^2 \alpha}{\rho} + \frac{\text{sen}^2 \alpha}{N}$$

Il **RAGGIO MEDIO DI CURVATURA** delle sezioni normali in un punto è dato da:

$$R = \sqrt{R_1 \cdot R_2} = \sqrt{\rho \cdot N} = \frac{a \cdot \sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi}$$

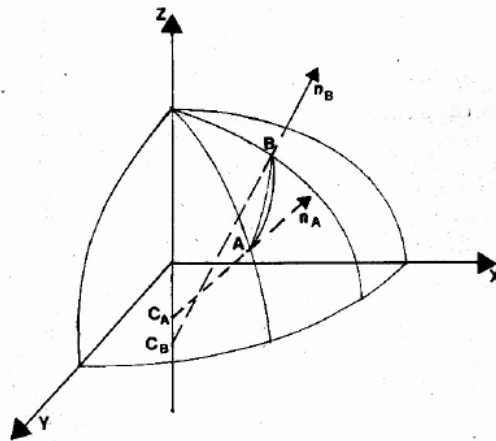
esso è il raggio della sfera che meglio approssima l'ellissoide nell'intorno di un punto, detta **SFERA LOCALE**.

La formula di Eulero e il teorema di Meusnier permettono di calcolare in un punto il raggio di curvatura di una **curva qualsiasi** sull'ellissoide.

SEZIONI NORMALI RECIPROCHE

Dati due punti A e B sull'ellissoide non esiste in generale un'unica sezione normale che li contenga ma 2 sezioni normali distinte dette **reciproche** (vedi Figura6).

Figura 6



ARCHI DI CURVE SULL'ELLISSOIDE

Noti i raggi di curvatura del meridiano e del parallelo è possibile ricavare i rispettivi elementi di arco ds_p (arco elementare di parallelo) e ds_m (arco elementare di meridiano):

$$ds_p = r \times d\lambda$$

$$ds_m = \rho \times d\varphi$$

COORDINATE CARTESIANE GEOCENTRICHE

$$X = (N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda$$

$$Y = (N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda$$

$$Z = (N \cdot (1 - e^2) + h) \cdot \sin \varphi$$

(*)

COORDINATE GEOGRAFICHE

$$\frac{Y}{X} = \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} = \tan \lambda$$

$$\lambda = \arctan \frac{Y}{X}$$

dalla prima e dalla terza delle (*) si calcola h

$$h = \frac{X - N \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda}{\cos \varphi \cdot \cos \lambda} = \frac{Z - (1 - e^2) \cdot N \cdot \sin \varphi}{\sin \varphi}$$

$$\frac{X}{\cos \varphi \cdot \cos \lambda} - N = \frac{Z}{\sin \varphi} - (1 - e^2) \cdot N$$

$$\frac{X \cdot \sin \varphi}{\cos \varphi \cdot \cos \lambda} - N \cdot \sin \varphi = Z - (1 - e^2) \cdot N \cdot \sin \varphi$$

$$\tan \varphi \cdot \frac{X}{\cos \lambda} = Z - (1 - e^2) \cdot N \cdot \sin \varphi + N \cdot \sin \varphi$$

e osservando che:

$$\frac{X}{\cos \lambda} = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{Z - (1 - e^2) \cdot N \cdot \sin \varphi + N \cdot \sin \varphi}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \frac{Z - N \cdot \sin \varphi + e^2 \cdot N \cdot \sin \varphi + N \cdot \sin \varphi}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

$$\varphi = \arctan \frac{Z + e^2 \cdot N \cdot \sin \varphi}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

FORMULE DI BENCINI

$$R = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} \quad (\text{distanza dell'asse polare})$$

$$\vartheta_0 = \arctan \frac{Z}{R \cdot \sqrt{1 - e^2}} \quad (\text{valore di prima approssimazione della latitudine ridotta})$$

$$\delta \vartheta = \frac{\frac{Z}{a} \cdot \sqrt{1 - e^2} + e^2 \cdot \sin \vartheta_0 - \frac{R}{a} \cdot \tan \vartheta_0}{\frac{R}{a} \cdot (1 + \tan^2 \vartheta_0) - e^2 \cdot \cos \vartheta_0} \quad (\text{correzione da apportare al valore } \vartheta_0)$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + \delta \vartheta \quad (\text{valore corretto di seconda approssimazione della latitudine ridotta})$$

$$\varphi = \arctan \frac{\tan \vartheta}{\sqrt{1-e^2}}$$