CORSO DI TOPOGRAFIA A - A.A. 2006-2007

ESERCITAZIONI - 10.05.07

CALCOLI SUL PIANO DI GAUSS

Esercizi tratti da Monti, Pinto, *Trattamento dei dati topografici e cartografici*,Clup

ESERCIZIO 1

Si vuol calcolare lunghezza e azimut di un arco di geodetica, note le coordinate gaussiane dei due estremi. Si considerino i due vertici trigonometrici del IV ordine P e Q di cui vengono fornite le monografie.

Punto P:

N°056129	*Nome :* ***Cascina Morentone***	*(1954) Belvedere della cascina.*
Ord. IV	*Comune : S. Benigno Canadese (TO)*	*Asse geometrico del belvedere.*
Geografiche	$\varphi_P = 45° 13' 30''.919$	$\lambda_{Pmm} = -4° 41' 39''.744$
Gauss -Boaga	$N_P = 5008817.78$	$E_P = 1402488.09$

Punto Q:

N°071069	*Nome :* ***Monteforte (Chiesa parr.^{le})***	*(1959) Campanile della chiesa*
Ord. IV	*Comune : Varzi (PV)*	*Asse geometrico del campanile.*
Geografiche	$\varphi_Q = 44° 48' 09''.408$	$\lambda_{Qmm} = -3° 14' 36''.479$
Gauss -Boaga	$N_Q = 4961136.86$	$E_Q = 1516519.10$

Distanza ellissoidica fra P e Q?

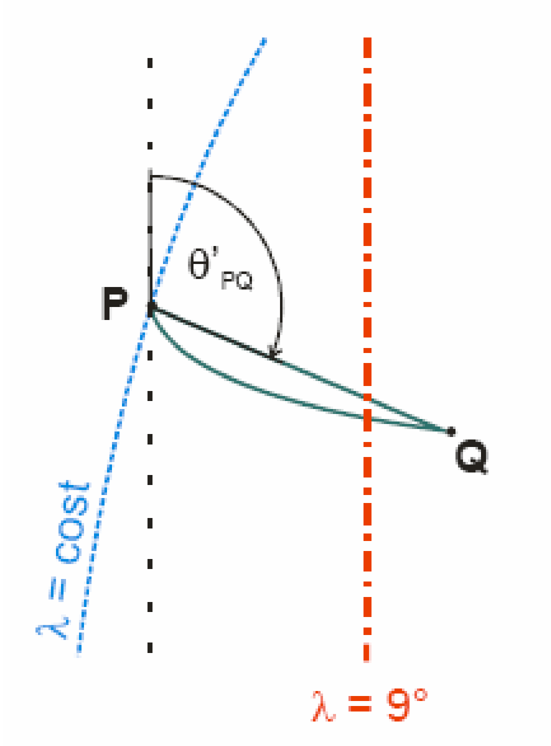
Azimut della geodetica PQ in P?

1) Calcolo delle coordinate depurate della falsa origine:

$E_P = 1402488.09$

$E_P^* = E_P - 1500000 = -97511{,}91$ m

E_Q = 1516519.10
E_Q^* = E_Q – 1500000 = 16519,10 m



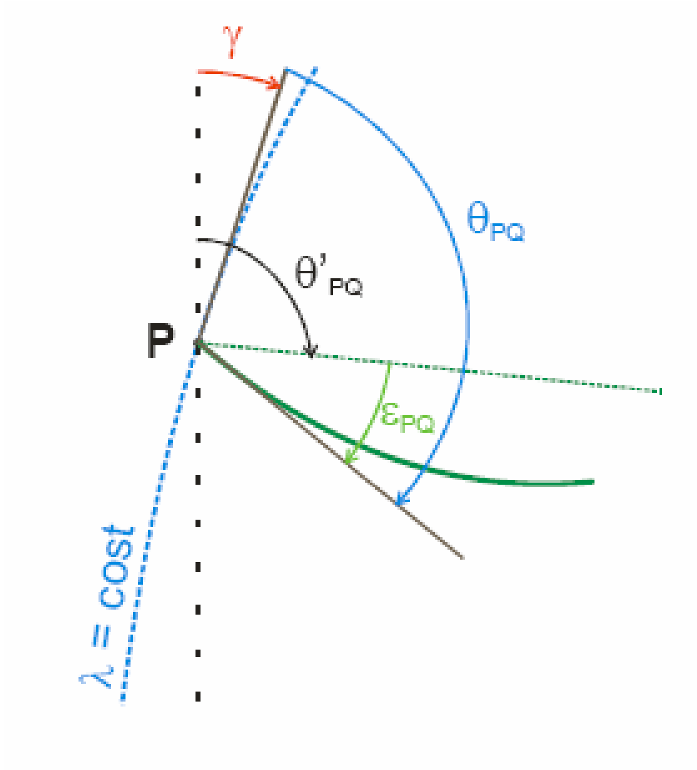
2) Calcolo dell'angolo θ'_{PQ}:

NP = 5008817.78
NQ = 4961136.86

$$\vartheta'_{PQ} = \arctan\left(\frac{E_Q^* - E_P^*}{N_Q - N_P}\right) + \pi = 1.96684213\text{rad}$$

$$\vartheta'_{PQgon} = \frac{\vartheta'_{PQrad}}{\pi} \cdot 200 = 125^g.2131$$

L'angolo di direzione θ'_{PQ} vale $125^g.2131$.
Per determinare l'azimut è necessario conoscere la convergenza del meridiano γ_P e l'angolo di riduzione alla corda ε_{PQ}.



θ_{PQ} sarà espresso dalla somma:

$$\vartheta_{PQ} = \vartheta'_{PQ} - |\gamma_P| + |\varepsilon_{PQ}|$$

3) Calcolo della convergenza del meridiano γ_P :

Sono note le longitudini del meridiano centrale del fuso λ_{MC} = 9° e del meridiano di riferimento Monte Mario λ_{MM} = 12° 27' 08.4'':

$$\lambda_{MC} = 9°$$
$$\lambda_{MM} = 12°27'08.4'' = 12°.452333$$
$$\lambda_{Pmm} = -4°41'39.744'' = 4.694373$$

La longitudine di P rispetto al meridiano centrale del fuso ovest vale:

$$\lambda_{Pmc} = \lambda_{Pmm} + \lambda_{MM} - \lambda_{MC} = -1°14'31.34''$$

La longitudine λ_{Pmc} in gradi sessagesimali [-1° 14' 31''.34] =1,2420389 rad

La convergenza del meridiano:

$$\gamma_P = \lambda_{Pmc} \cdot sen\varphi_P \cdot \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \lambda_{Pmc}^2 \cdot \cos^2\varphi_P \cdot \left(1 + \frac{3\,\mathrm{e}_{\mathrm{hayford}}^2}{1 - \mathrm{e}_{\mathrm{hayford}}^2} \cdot \cos^2\varphi_P\right)\right] = -0.0153898\,\mathrm{rad} = \text{-}0^{g}.979745$$

4) Calcolo del raggio di curvatura della sfera locale in un punto medio $\overline{R}$

$$\overline{\varphi} = \frac{\varphi_P + \varphi_Q}{2} = 0.7856414\,\mathrm{rad}$$

$$\overline{W} = \sqrt{1 - e_{hayford}^2 \cdot sen^2\overline{\varphi}} = 0{,}998317099$$

$$\overline{\rho} = \frac{a_{hayford} \cdot \left(1 - e_{hayford}^2\right)}{\overline{W}^3} = 6367602{,}264\,\mathrm{m}$$

$$\overline{N} = \frac{a_{hayford}}{\overline{W}} = 6389140{,}291\,\mathrm{m}$$

$$\overline{R} = \sqrt{\overline{\rho} \cdot \overline{N}} = 6378362{,}187\,\mathrm{m}$$

5) Calcolo della correzione angolare alla corda ε_{PQ}*:*

$$\varepsilon_{PQ} = \frac{\left(N_P - N_Q\right) \cdot \left(2 \cdot E_P^* + E_Q^*\right)}{0.9996^2 \cdot 6 \cdot \overline{R}^2} = -0^{g}.0022215$$

6) Calcolo dell'azimut θ_{PQ}*:*

$$\vartheta_{PQ} = \vartheta_{PQ}^{'} - \left|\gamma_P\right| + \left|\varepsilon_{PQ}\right| = 124^{g}.23558$$

7) Calcolo del modulo di deformazione lineare m_d *:*

$$m_d = 0.9996 + \frac{E_P^{*2} + E_P^* \cdot E_Q^* + E_Q^{*2}}{0.9996 \cdot 6 \cdot \overline{R}^2} = 0.999633485$$

8) Calcolo della distanza (lunghezza arco di geodetica) PQ

$$d_{piano} = \sqrt{\left(E_Q^* - E_P^*\right)^2 + \left(N_Q^* - N_P^*\right)^2} = 123598.307m$$

$$d_{geod} = \frac{d_{piano}}{m_d} = 123643.624m$$

ESERCIZIO 2

Applicazione della carta di Gauss per calcoli topografico-ingegneristici.

Il progetto di una galleria fornisce le coordinate sul piano di Gauss-Boaga dell'ingresso e dell'uscita della stessa, la quota h di ingresso e di sbocco e le coordinate cartografiche di un terzo punto di riferimento per la direzione dell'asse della galleria.
Determinare:
- la lunghezza reale della galleria;
- l'angolo zenitale della direzione d'asse dall'imbocco, assunto un coefficiente di rifrazione k pari a 0.15;
- l'angolo orizzontale della direzione d'asse, misurato in senso orario, compreso fra le direzioni definite dal punto di ingresso (1) e dal punto di riferimento (V), dal punto d'ingresso (1) e dal punto di sbocco (2).

Sono noti: R = 6370 km e le monografie dei punti 1, 2 e V.

Punto 1	N_1 =5084660.35 m	E_1 =1478514.68 m	h_1 =1230.12 m
Punto 2	N_2 =5102127.48 m	E_2 =1479621.30 m	h_2 =1650.25 m
PuntoV	N_V =5085550.22 m	E_V =1477910.54 m	---

1) Calcolo della lunghezza reale della galleria

E_1 = 1478514.68
E_1* = E_1 – 1500000 = -21485,32 m

E_2 = 1479621.30
E_2* = E_2 – 1500000 = -20378,70 m

Calcolo del modulo di deformazione :

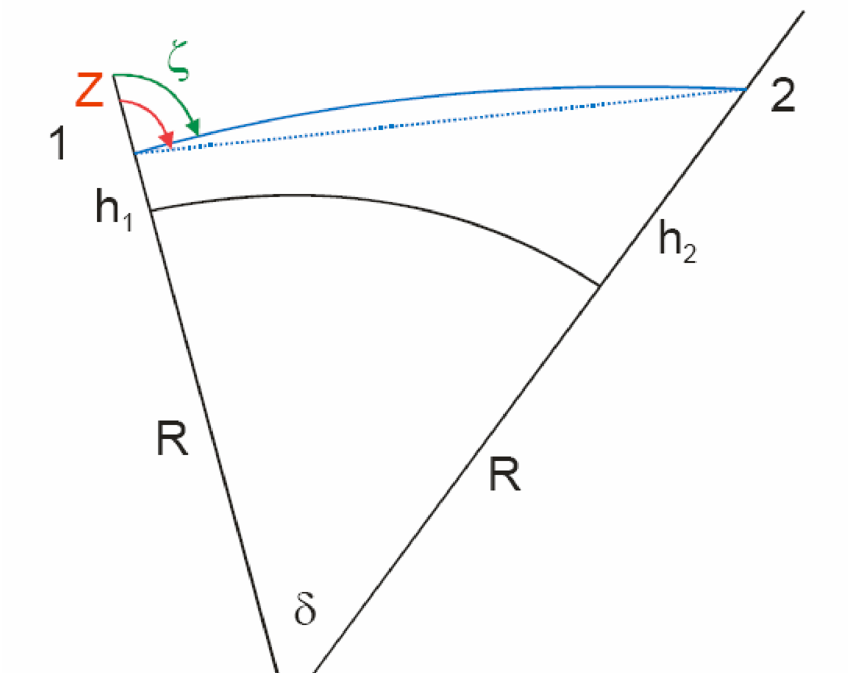
$$m_d = 0.9996 + \frac{E_1^{*2} + E_1^* \cdot E_2^* + E_2^{*2}}{0.9996 \cdot 6 \cdot \overline{R}^2} = 0.999605402$$

Calcolo della lunghezza della galleria:

$$d_{piano} = \sqrt{\left(E_2^* - E_1^*\right)^2 + \left(N_2^* - N_1^*\right)^2} = 17502.149m$$

$$d_{geod} = \frac{d_{piano}}{m_d} = 17509.059m$$

Infine, note le quote dei due punti d'estemità e applicando il teorema di Carnot:



$$\delta_{rad} = \frac{d_{geod}}{R} = 0{,}00274867$$

$$d_{REALE} = \sqrt{\overline{10}^2 + \overline{20}^2 - 2 \cdot \overline{10} \cdot \overline{20} \cdot \cos\delta} = 17518.051m$$

La lunghezza reale della galleria è di 17 km e 518.05 m.

2) Calcolo dell'angolo zenitale dell'asse dall'imbocco Calcolo dell'angolo zenitale teorico:

Applicando il teorema dei seni al triangolo 102

$$\frac{d_{REALE}}{sen\delta} = \frac{R+h_2}{sen(200-Z)} = \frac{R+h_2}{senZ}$$

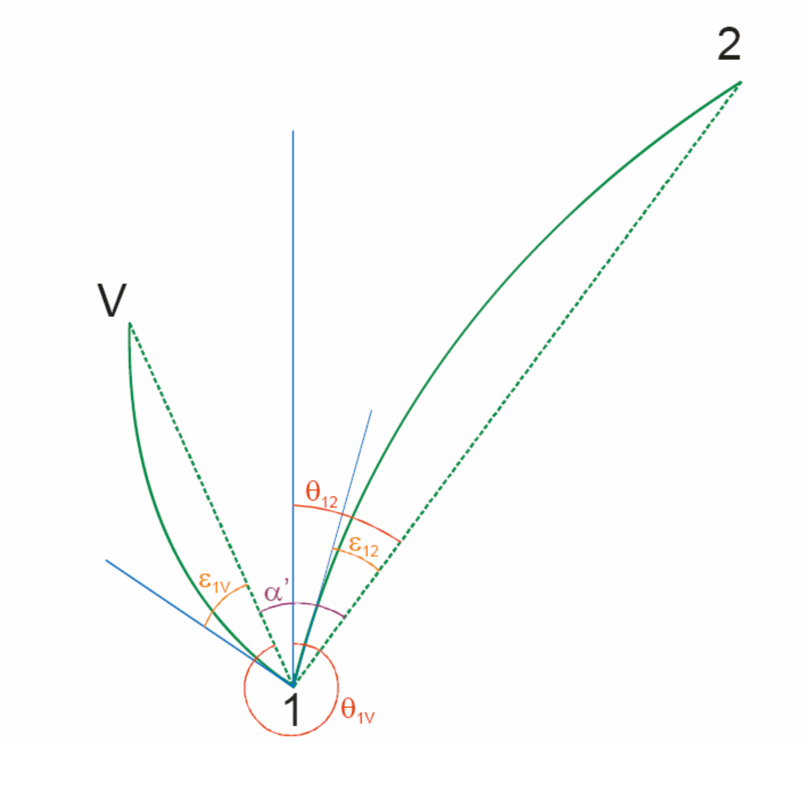
$$Z = arcsen\frac{(R+h_2)}{d_{REALE}} \cdot sen\delta = 98^g.5608$$

Calcolo dell'angolo zenitale reale:

k = 0.15

$$\xi_1 = Z - k \cdot \frac{d_{geod}}{2R} = 98^g.5477$$

3) Calcolo dell'angolo azimutale tra il riferimento e l'asse



Calcolo dell'angolo α'

$$\vartheta_{12} = \arctan \frac{E_2^* - E_1^*}{N_2 - N_1} = 4^g.0279$$

$$\vartheta_{1V} = \arctan \frac{E_V^* - E_1^*}{N_V - N_1} + 400^g = 362^g.0301$$

$$\alpha' = \theta_{12} + \left(400^g - \theta_{1V}\right) = 41^g.9978$$

Calcolo della convergenza della corda

$$\varepsilon_{1V} = \frac{\left(N_1 - N_V\right) \cdot \left(2 \cdot E_1^* + E_V^*\right)}{0.9996^2 \cdot 6 \cdot R^2} = 0^g.000015$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\left(N_1 - N_2\right) \cdot \left(2 \cdot E_1^* + E_2^*\right)}{0.9996^2 \cdot 6 \cdot R^2} = 0^g.00029$$

Calcolo dell'angolo α

$$\alpha = \alpha' + \varepsilon_{1P} - \varepsilon_{12} = 41^g.9975$$

ESERCIZIO 3

Di due vertici topografici sono note le coordinate geografiche Roma40, Geografiche WGS84 e Cartografiche Gauss-Boaga.
Calcolare la distanza reale tra i due vertici:

a) utilizzando le coordinate geografiche Roma40
b) utilizzando le coordinate Gauss-Boaga
c) utilizzando le coordinate geografiche WGS84

Vertice 40801

Geografiche Roma40

$\varphi =$ 45° 54' 16'',777
$\lambda =$ 0° 51' 27'',854
Q = 26,74 m

Riferendo la longitudine a Greenwich

$\lambda_{GW} =$ 13° 18' 36'',254

Gauss-Boaga

N = 5084939,22 m E = 2388914,75 m

Geografiche WGS84

$\varphi =$ 45° 54' 19'',160
$\lambda =$ 13° 18' 35'',661
h = 71,03 m

Vertice 25801

Geografiche Roma40

$\varphi =$ 46° 3' 51'',419
$\lambda =$ 0° 46' 59'',890
Q = 141,38 m

Riferendo la longitudine a Greenwich

$\lambda_{GW} =$ 13° 14' 8'',290

Gauss-Boaga

N = 5102799,71 m E = 2383533,92 m

Geografiche WGS84

$\varphi =$ 46° 3' 53'',805
$\lambda =$ 13° 14' 7'',703
h = 186,19 m

1) Calcolo della distanza reale a partire dalle coordinate geografiche Roma 40

Nel Datum Roma40 si dovranno utilizzare i parametri dell’ellissoide di Hayford. Ricordando che***:***

$$W = \sqrt{1 - e^2 \cdot sen^2\varphi}$$

$$\rho = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{W^3}$$

$$N = \frac{a}{W} \qquad R = \sqrt{\rho \cdot N}$$

Si ottiene:

Vertice 40801	Vertice 25801
W_{40} = 0,998264763	W_{25}= 0,998255387
N_{40} = 6389475,256 m	N_{25}= 6389535,264 m
ρ_{40}= 6368603,824 m	ρ_{25}= 6368783,261 m
R_{40} = 6379031,00 m	R_{25} = 6379150,82 m

Possiamo ora calcolare le coordinate cartesiane geocentriche dei punti:

$$X = (N + h) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda$$
$$Y = (N + h) \cdot \cos\varphi \cdot sen\lambda$$
$$Z = (N \cdot (1 - e^2) + h) \cdot sen\varphi$$

Vertice 40801	Vertice 25801
X = 4326732,027 m	X = 4315714,709 m
Y = 123599,125 m	Y = 1015074,061 m
Z = 4557981,999 m	Z = 4570393,256 m

Da queste coordinate è immediato il calcolo della distanza reale tra i due vertici:

$$D = \sqrt{(X_{40} - X_{25})^2 + (Y_{40} - Y_{25})^2 + (Z_{40} - Z_{25})^2} = 18657{,}37m$$

2) Calcolo della distanza reale a partire dalle coordinate Gauss-Boaga

E_{40} = 2388914,75 m
$E_{40}*$ = E_{40} – 2520000 = -131085,25 m

E_{25} = 2383533,92 m
$E_{25}*$ = E_{25} – 2520000 = -136466,08 m

$$\overline{R} = \frac{R_{40} + R_{25}}{2} = 6379090.91m$$

Calcolo del modulo di deformazione :

$$m_d = 0.9996 + \frac{E_{40}^{*2} + E_{40}^{*} \cdot E_{25}^{*} + E_{25}^{*2}}{0.9996 \cdot 6 \cdot \overline{R}^2} = 0.9998200$$

Distanza sulla carta

$$d_{carta} = \sqrt{\left(E_2^* - E_1^*\right)^2 + \left(N_2 - N_1\right)^2} = 18653,43m$$

Lunghezza arco di geodetica

$$d_0 = \frac{d_{carta}}{m_d} = 18656,79m$$

Angolo al centro

$$\delta_{rad} = \frac{d_0}{\overline{R}} = 0,002924678$$

Infine, note le quote dei due punti d'estremità e applicando il teorema di Carnot:

$$D = \sqrt{\left(\overline{R} + Q_{40}\right)^2 + \left(\overline{R} + Q_{25}\right)^2 - 2 \cdot \left(\overline{R} + Q_{40}\right)^2 \cdot \left(\overline{R} + Q_{25}\right)^2 \cdot \cos\delta} = 18657,38m$$

3) Calcolo della distanza reale a partire dalle coordinate geografiche WGS84

Nel Datum WGS84, si calcola la Gran Normale:

Vertice 40801	Vertice 25801
W_{40} = 0,998272032	W_{25}= 0,998262697
N_{40} = 6389177,291 m	N_{25}= 6389237,043 m

Quindi le coordinate cartesiane geocentriche:

$$X = (N + h) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda$$
$$Y = (N + h) \cdot \cos\varphi \cdot sen\lambda$$
$$Z = (N \cdot (1 - e^2) + h) \cdot sen\varphi$$

Vertice 40801	Vertice 25801
X = 4326511,601 m	X = 4315494,629 m
Y = 123533,843 m	Y = 1015009,337 m
Z = 4557982,085 m	Z = 4570393,316 m

Da queste coordinate è immediato il calcolo della distanza reale tra i due vertici:

$$D = \sqrt{(X_{40} - X_{25})^2 + (Y_{40} - Y_{25})^2 + (Z_{40} - Z_{25})^2} = 18656{,}89m$$

Osservazione: Rispetto al valore ottenuto nel datum Roma40, la differenza della distanza ottenuta è di 49 cm pari a 26,21 ppm. Tale valore esprima una stima approssimata del fattore di scala utilizzato nel modello di trasformazione tra i due sistemi di riferimento geodetico.