Trattamento delle Osservazioni
ESERCITAZIONE 2

(Esercizi tratti da: Guerra – "La propagazione dell'errore")

Esercizio 1

Un edificio rettangolare presenta un lato a di 50 ± 0.10m e l'altro di 30 ± 0.05m
a e b rappresentano due variabili *indipendenti*.
Determinare:

- Il perimetro e la sua deviazione standard o errore quadratico medio

$$P = 2a + 2b = 2 \cdot 50 + 2 \cdot 30 = 160m$$
$$\sigma_p^2 = 4\sigma_a^2 + 4\sigma_b^2 = 4(0{,}10)^2 + 4(0{,}05)^2 = 0{,}05m^2$$
$$\sigma_p = \pm\ 0{,}223m$$

- La superficie e il suo errore quadratico medio

$$S = ab = 1500\,m^2$$
$$\sigma_S^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 = b^2\sigma_a^2 + a^2\sigma_b^2 = 15{,}25m^2$$
$$\sigma_S = \pm\ 3{,}9m$$

- Il volume, se la sua altezza c è 25 ± 0.30m

$$V = abc = 37500m^3$$
$$\sigma^2(V) = \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)^2 \sigma_c^2$$
$$= (bc)^2\sigma_a^2 + (ac)^2\sigma_b^2 + (ba)^2\sigma_c^2 = 212031m^6$$
$$\sigma_v = 460{,}5m^3$$

- Determinare la correlazione fra la superficie ed il perimetro

$P = 2a + 2b$ (lineare) scarti: $V_P = 2V_a + 2V_b$

$S = ab$ (non lineare) scarti: $V_S = \frac{\partial S}{\partial a}V_a + \frac{\partial S}{\partial b}V_b = bV_a + aV_b$

$$M(V_P V_S) = M\left[(2V_a + 2V_b)(bV_a + aV_b)\right] =$$
$$= M\left(2bV_a^2 + 2bV_aV_b + 2aV_bV_a + 2aV_b^2\right) =$$
$$= 2bM(V_a)^2 + 2bM(V_bV_a) + 2aM(V_aV_b) + 2aM(V_b)^2$$

Occorre ricordare che la media è un operatore come la sommatoria e quindi le "costanti" si possono estrarre dalla sommatoria.
Inoltre, *per definizione*, sappiamo che la media degli scarti al quadrato è la varianza, mentre la media del prodotto degli scarti è detta covarianza.

$$M\left(V^2\right) = \sigma^2 \quad ; \quad M\left(V_i V_k\right) = C_{ik} = \sigma_{ik}$$

Nel nostro caso, data l'indipendenza tra a e b, $C_{ik} = 0$ e quindi:

$$M\left(V_P V_S\right) = 2b\sigma_a^2 + 2a\sigma_b^2$$

Determinare la correlazione lineare r tra S e P.

$$r_{PS} = \frac{M\left(V_P V_S\right)}{\sigma_P \sigma_S} = \frac{2b\sigma_a^2 + 2a\sigma_b^2}{\sigma_P \sigma_S} = 0{,}98$$

- Determinare la correlazione tra superficie e volume

$$V = abc \qquad \text{scarti:} \quad V_V = \frac{\partial V}{\partial a} V_a + \frac{\partial V}{\partial b} V_b + \frac{\partial V}{\partial c} V_c = abV_a + acV_b + abV_c$$

$$\begin{aligned} M\left(V_S V_V\right) &= M\left[\left(bV_a + aV_b\right)\left(abV_c + acV_b + bcV_a\right)\right] = \\ &= M\left(ab^2V_a^2 + abcV_aV_b + ab^2V_aV_c + \right. \\ &\quad \left. + a^2bV_aV_b + a^2cV_b^2 + a^2bV_bV_c\right) = \\ &= ab^2\sigma_a^2 + a^2c\sigma_b^2 \end{aligned}$$

Determinare la correlazione lineare r tra S e V

$$r_{SV} = \frac{M\left(V_S V_V\right)}{\sigma_S \sigma_V} = 0{,}34$$

- Supponiamo che tra a e b vi sia una correlazione lineare $r = -0.5$:

calcolare la varianza del perimetro e della superficie e la loro correlazione

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= 4\sigma_a^2 + 4\sigma_b^2 + 2\cdot 4\cdot M\left(ab\right) = \\ &= 0.05 + 8\cdot r_{ab}\cdot\sigma_a\cdot\sigma_b = 0.05 - 4\cdot 0.005 = 0.03m^2 \\ \sigma_S^2 &= b^2\sigma_a^2 + a^2\sigma_b^2 + 2\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial b}\right) + M\left(ab\right) = \\ &= 15.25 + 2\cdot r_{ab}\cdot ba\cdot\sigma_b\cdot\sigma_a = 15.25 - 7.50 = 7.75m^4 \end{aligned}$$

$$M\left(V_P V_S\right) = 2b\sigma_a^2 + 2br_{ab}\sigma_a\sigma_b + 2ar_{ab}\sigma_a\sigma_b + 2a\sigma_b^2$$

$$r_{PS} = \frac{M\left(V_P V_S\right)}{\sigma_P \sigma_S} = 0{,}93$$

La correlazione tra a e b, nel caso visto, migliora le varianze, e geometricamente si ha un effetto di questo tipo (figura 2.1):

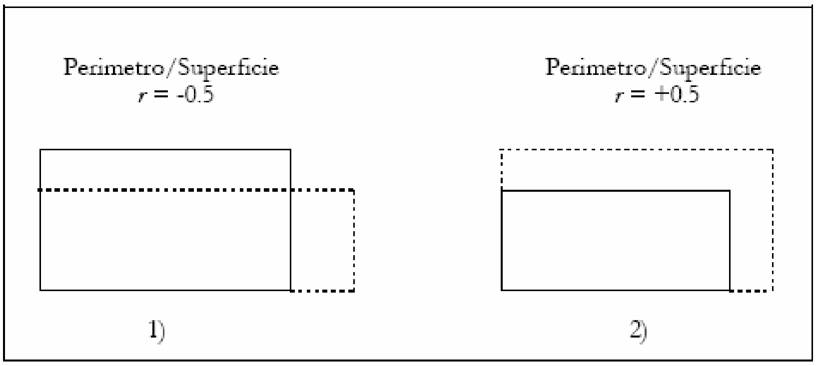

Figura 2.1

1 - La superficie resta più vicina al valore dato, ma di forma diversa (varianza più piccola);
2 - La superficie resta simile (varianza più grande).

Esercizio 2

Come è noto un triangolo è determinato quando tre dei suoi elementi (uno almeno lineare) sono conosciuti. In questo caso sono stati misurati due lati e l'angolo compreso (figura 2.5).

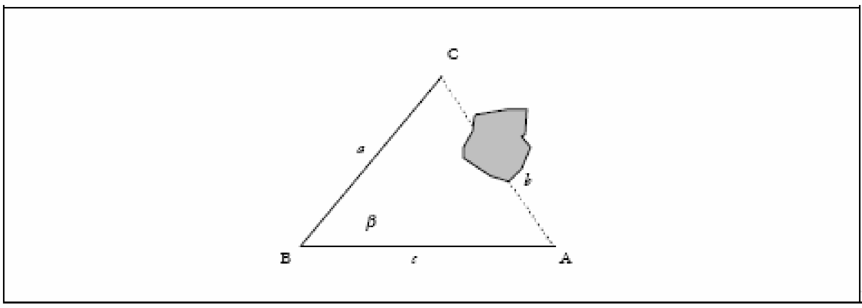

Figura 2.5

Sia:

$$a = 1.000m \ , \quad c = 1.500m \ , \quad \beta = 50g$$

$$\sigma_d = \left(3 + 2D\left[Km\right]\right)mm$$

$$\sigma_a = 5mm \ , \ \sigma_c = 6mm \ , \quad \sigma_b = 5^{cc} = 0.0005^g = \left(0.0005 \cdot \frac{\pi}{200}\right)^{RAD}$$

Determinare:
1. la misura del lato b e la sua varianza;
2. la superficie S del triangolo e la sua varianza;
3. la correlazione esistente tra la misura del lato b e la superficie S.

- Calcolo della superficie S :

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot sen\,\beta = 530330.0859m^2$$

- Calcolo della varianza della superficie S :

$$\sigma_S^2 = J_S \cdot C_{ac\beta} \cdot J_S^t$$

$$J_S = \left| \frac{\partial S}{\partial a} \quad \frac{\partial S}{\partial c} \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} \right| = \left| \frac{1}{2} \cdot c \cdot sen\,\beta \quad \frac{1}{2} \cdot a \cdot sen\,\beta \quad \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot cos\,\beta \right| =$$
$$= \left| 530.33 \quad 353.55 \quad 530330.09 \right|$$

$$C_{ac\beta} = \begin{vmatrix} \sigma_a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\beta^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.000025 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000036 & 0 \\ 0 & 0 & 6.1685028 \cdot 10^{-11} \end{vmatrix}$$

$$\sigma_S^2 = 28.8802 m^4$$
$$\sigma_S = \pm 5.3740 m^2$$
$$S = 530330.08 \pm 5.37 m^2$$

- Calcolo della misura del lato b :

Dal teorema di Carnot si ricava b^2 :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\,\beta$$
$$b = 1062.3934 m$$

- Calcolo della varianza di b :

$$J_S = \left| \frac{\partial b}{\partial a} \quad \frac{\partial b}{\partial c} \quad \frac{\partial b}{\partial \beta} \right| = \left| \frac{2 \cdot a - 2 \cdot c \cdot cos\,\beta}{2b} \quad \frac{2 \cdot c - 2 \cdot a \cdot cos\,\beta}{2b} \quad \frac{2 \cdot a \cdot c \cdot sen\,\beta}{2b} \right| =$$
$$= \left| -5.7098 \cdot 10^{-2} \quad 0.74632 \quad 998.3686 \right|$$

$$C_{ac\beta} = \begin{vmatrix} \sigma_a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\beta^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.000025 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000036 & 0 \\ 0 & 0 & 6.1685028 \cdot 10^{-11} \end{vmatrix}$$

$$\sigma_b^2 = 8.1618 \cdot 10^{-5} m^2$$
$$\sigma_b = \pm 9.0342 \cdot 10^{-3} m$$
$$b = 1062.39 m \pm 9.03 mm$$

- Calcolo della correlazione tra la misura del lato b e la superficie S :

$$\sigma_{bs} = \left(\frac{a - c \cdot cos\,\beta}{b} \right) \cdot \left(\frac{c \cdot sen\,\beta}{2} \right) \cdot \sigma_a^2 + \left(\frac{c - a \cdot cos\,\beta}{b} \right) \cdot \left(\frac{a \cdot sen\,\beta}{2} \right) \cdot \sigma_c^2 +$$
$$+ \left(\frac{a \cdot c \cdot sen\,\beta}{2} \right) \cdot \left(\frac{a \cdot c \cdot cos\,\beta}{2} \right) \cdot \sigma_\beta^2$$

$$r_{bS} = \frac{\sigma_{bS}}{\sigma_b \cdot \sigma_S} = 0.8528 = 85.2\%$$

Il lato b e la superficie S sono ben correlati.

Esercizio 3

In questo esempio siano noti del triangolo due angoli (α, β) e il lato compreso (figura 2.6).

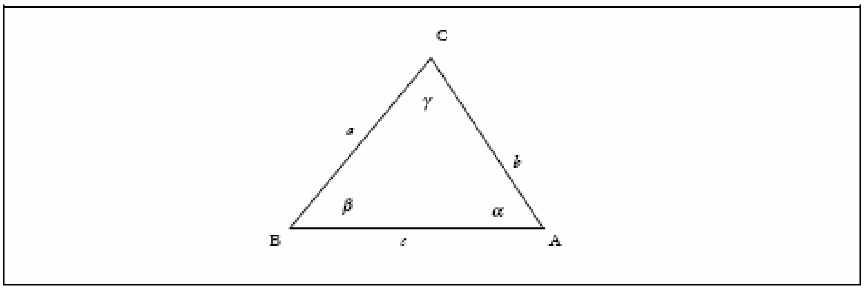

Figura 2.6

Sia:

$c = 1000m \quad , \quad \alpha = 50^g \quad , \quad \beta = 70^g \quad , \quad \sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0.001^g$

$\sigma_d = (5 + 3D[Km])mm$

Determinare:

1. la misura del lato a e la sua varianza;
2. la misura del lato b e la sua varianza;
3. la misura della superficie S e la sua varianza;
4. la correlazione tra il lati a e b.

- Calcolo della misura dei lati a, b e della superficie S :

$$\gamma = 200^g - 50^g - 70^g = 80^g$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0.001 \cdot \frac{\pi}{200} = 1.5708 \cdot 10^{-5\ RAD}$$

$$\sigma_c = 8mm = 0.008m$$

Dal teorema dei seni si ricava:

$$\frac{c}{sen\,\gamma} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{a}{sen\,\alpha}$$

$$a = c \cdot \frac{sen\,\alpha}{sen(\alpha + \beta)} = 743.4961m$$

$$b = c \cdot \frac{sen\,\beta}{sen(\alpha + \beta)} = 936.8597m$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sen\,\gamma = \frac{1}{2} \cdot c^2 \cdot \frac{sen\,\alpha \cdot sen\,\beta}{sen(\alpha + \beta)} = 331229.9241m^2$$

- Calcolo della varianza della misura di b :

$$\sigma_b^2 = J_b \cdot C_{\beta\alpha} \cdot J_b^t$$

$$J_b = \left|\frac{\partial b}{\partial c} \quad \frac{\partial b}{\partial \beta} \quad \frac{\partial b}{\partial \alpha}\right| =$$
$$= \left|\frac{sen\,\beta}{sen(\alpha+\beta)} \quad \frac{c\cos\beta\, sen(\alpha+\beta) - sen\,\beta\cos(\alpha+\beta)}{sen^2(\alpha+\beta)} \quad c\, sen\,\beta\left(\frac{-\cos(\alpha+\beta)}{sen^2(\alpha+\beta)}\right)\right|$$
$$= |0.936859701734 \quad 781.758030339419 \quad -304.404169700233|$$

$$C_{c\beta\alpha} = \begin{vmatrix} \sigma_c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\alpha^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.000064 & 0 & 0 \\ 0 & 2.467\cdot 10^{-10} & 0 \\ 0 & 0 & 2.467\cdot 10^{-10} \end{vmatrix}$$

$$\sigma_b^2 = 2.2983\cdot 10^{-4}\, m^2$$
$$\sigma_b = \pm 1.5160\cdot 10^{-2}\, m$$
$$b = 936.85297m \pm 0.0151m$$

- Calcolo della varianza della misura di a :

$$\sigma_a^2 = J_a \cdot C_{c\beta\alpha} \cdot J_a^t$$

$$J_a = \left|\frac{\partial a}{\partial c} \quad \frac{\partial a}{\partial \beta} \quad \frac{\partial a}{\partial \alpha}\right| =$$
$$= \left|\frac{sen\,\alpha}{sen(\alpha+\beta)} \quad \frac{-c\cos(\alpha+\beta)\, sen\,\alpha}{sen^2(\alpha+\beta)} \quad c\,\frac{\cos\alpha\, sen(\alpha+\beta) - sen\,\alpha\cos(\alpha+\beta)}{sen^2(\alpha+\beta)}\right|$$
$$= |0.743496068920 \quad 241.576516863966 \quad 985.072585784335|$$

$$C_{c\beta\alpha} = \begin{vmatrix} \sigma_c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\alpha^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.000064 & 0 & 0 \\ 0 & 2.467\cdot 10^{-10} & 0 \\ 0 & 0 & 2.467\cdot 10^{-10} \end{vmatrix}$$

$$\sigma_a^2 = 2.8921\cdot 10^{-4}\, m^2$$
$$\sigma_b = \pm 1.7006\cdot 10^{-2}\, m$$
$$a = 743.4960m \pm 0.0170m$$

- Calcolo della correlazione tra i lati a e b :

$$C_{ab} = \begin{vmatrix} \cdots J_a \cdots \\ \cdots J_b \cdots \end{vmatrix} \cdot C_{c\beta\alpha} \cdot \begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ J_a & J_b \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.2892\cdot 10^{-3} & 0.1652\cdot 10^{-3} \\ 0.1652\cdot 10^{-3} & 0.2298\cdot 10^{-3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{ab} \\ \sigma_{ab} & \sigma_b^2 \end{vmatrix}$$

$$r_{ab} = \frac{\sigma_{ab}}{\sigma_a \cdot \sigma_b} = 0.6406 = 64\%$$

I lati a e b sono ben correlati.

- Calcolo della varianza della superficie S :

$$\sigma_S^2 = J_S \cdot C_{c\beta\alpha} \cdot J_S^t$$

$$J_S^t = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial S}{\partial c} \\ \dfrac{\partial S}{\partial \beta} \\ \dfrac{\partial S}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c \cdot \dfrac{sen\,\alpha \cdot sen\,\beta}{sen(\alpha+\beta)} \\ \dfrac{1}{2}c^2 \cdot sen\,\alpha \cdot \dfrac{cos\,\beta \cdot sen(\alpha+\beta) - sen\,\beta \cdot cos(\alpha+\beta)}{sen^2(\alpha+\beta)} \\ \dfrac{1}{2}c^2 \cdot sen\,\beta \cdot \dfrac{cos\,\alpha\, sen(\alpha+\beta) - sen\,\alpha\, cos(\alpha+\beta)}{sen^2(\alpha+\beta)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 622.4598 \\ 276393.2023 \\ 438853.0504 \end{vmatrix}$$

$$C_{c\beta\alpha} = \begin{vmatrix} \sigma_c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\alpha^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.000064 & 0 & 0 \\ 0 & 2.467 \cdot 10^{-10} & 0 \\ 0 & 0 & 2.467 \cdot 10^{-10} \end{vmatrix}$$

$$\sigma_S^2 = 94.4560 m^4$$

$$\sigma_S = \pm 9.7188 m^2$$

$$S = 331229.92 m^2 \pm 9.71 m^2$$