CORSO DI TOPOGRAFIA A - A.A. 2006-2007

ESERCITAZIONI - 09.05.06

ESERCIZI DI GEODESIA

ESERCIZIO 1

Calcolare i raggi di curvatura delle sezioni normali principali nel Polo Nord dell' ellissoide di Hayford.

1) Sezioni Normali Principali dell'ellissoide: MERIDIANO e PRIMO VERTICALE

2) Raggio di curvatura del meridiano : ρ (da valutare al Polo Nord).

$e^2_{hayford}$ = 0,00672267002233
$a_{hayford}$ = 6378388 m
$e^2 = e^2_{hayford}$;
$a = a_{hayford}$;

$$W = \sqrt{1 - e^2 \cdot sen^2 \varphi}$$

$$\rho = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{W^3}$$

Al polo: φ = 90°

$$W_{poloNord} = 0{,}996633$$

$$\rho_{poloNord} = 6399936{,}608 m$$

Al polo, $\rho_{polo\ nord}$ = 6399936.608 m

Esso coincide con il raggio di curvatura polare, definito come $\frac{a^2}{c}$, infatti:

$$\rho_{poloNord} = \frac{a \cdot (1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2)^3}} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{a^2}{a \cdot \sqrt{1-e^2}} = \frac{a^2}{c}$$

3) Raggio di curvatura del primo verticale : Gran Normale N (da valutare al Polo Nord).

$$N = \frac{a}{W} = 6399936{,}608\,\mathrm{m}$$

Al polo, $\rho_{polo\ nord}$ *=* $N_{polo\ nord}$ *= 6399936.608 m.*

ESERCIZIO 2

Calcolare i raggi di curvatura delle sezioni normali principali in un punto situato sull'equatore dell'ellissoide WGS84.

Per l'ellissoide WGS84 si hanno i seguenti parametri :

e^2_{WGS84} = 0,006694379990
a_{WGS84} = 6378137 m

$$\rho_{WGS84} = \frac{a_{WGS84} \cdot (1-e^2_{WGS84})}{\sqrt{(1-e^2_{WGS84} \cdot sen^2\varphi)^3}} = 6335439{,}327m$$

$$N_{WGS84} = \frac{a_{WGS84}}{\sqrt{1-e^2_{WGS84} \cdot sen^2\varphi}} = 6378137m$$

All'equatore WGS84, $\rho_{equatore}$ *= 6335439,327 m e* $N_{equatore}$ *= 6378137 m =* $a_{equatore}$*.*

ESERCIZIO 3

Sull'ellissoide di Hayford, in un punto P di latitudine φ = 43°8'34,653" N, calcolare:

- il raggio di curvatura del meridiano
- la gran normale
- il raggio del parallelo
- il raggio della sfera locale
- il raggio di curvatura di una geodetica uscente da P con azimut a_P = 335°14'45,6"

1) Latitudine di P: φ_P = 43°8'34,653" N (gradi sessagesimali: Degrees Minutes Seconds, DMS)

In gradi sessadecimali (Decimal Degrees, DEG)?

In radianti (Radiants, RAD)?

φ_{Pdeg} = **43 + 8/60 + 34.653/3600 =** 43.1429592

φ_P = 43.1429592 DEG

$$\varphi_{\mathrm{Prad}} = \frac{\varphi_{\mathrm{Pdeg}}}{180^{\circ}} \cdot \pi$$

φ_P = 0.752986687 RAD

2) Raggio di curvatura del meridiano ρ_P :

$$W_P = \sqrt{1 - e^2 \cdot sen^2 \varphi_p}$$

$$\rho_P = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{W_P^3} = 6365500{,}442 m$$

Nel punto P, ρ_P = 6365500,442 m.

3) Gran Normale N_P :

$$N_P = \frac{a}{W_P} = 6388437{,}236\, m$$

Nel punto P, N_P = 6388437,236 m.

4) Il raggio del parallelo r_P :

$$r_P = N_P \cdot \cos\varphi = 4661321{,}742 m$$

Nel punto P, r_P = 4661321.742 m.

5) Il raggio della sfera locale R_P :

$$R_P = \sqrt{\rho_P \cdot N_P} = 6376958{,}527 m$$

Nel punto P, R_P = 6376958.527 m.

6) Il raggio di curvatura R_α di una geodetica uscente da P con azimut α_P = 335°14'45,6":

$$R_\alpha = \left(\frac{\cos^2\alpha}{\rho_P} + \frac{sen^2\alpha}{N_P} \right)^{-1} = 6369510{,}014 m$$

ESERCIZIO 4

Una geodetica sull'ellissoide WGS84 presenta un azimut α_Q = 56°18'33" in un punto Q avente latitudine φ_Q = 35°58'14.8" N. Determinare l'azimut $\hat{\alpha}$ che assume la geodetica quando attraversa il parallelo alla latitudine $\hat{\varphi}$ = 40°.

Applichiamo il teorema di Clairaut, r sen α = cost.

quindi r_1 sen α_1 = r_2 sen α_2

$$r_Q \cdot sen\alpha_Q = \hat{r} \cdot sen\hat{\alpha}$$

r_Q è il raggio del parallelo in Q:

$$W_Q = \sqrt{1 - e^2 \cdot sen^2\varphi_Q}$$

$$N_Q = \frac{a}{W_Q} = 6385515{,}271\,m$$

$$r_Q = N_Q \cdot \cos\varphi_Q = 5167903{,}979m$$

$\hat{r}$ è il raggio del parallelo in $\hat{\varphi}$:

$$\hat{W} = \sqrt{1 - e^2 \cdot sen^2\hat{\varphi}}$$

$$\hat{N} = \frac{a}{\hat{W}} = 6386976{,}166\,m$$

$$\hat{r} = \hat{N} \cdot \cos\hat{\varphi} = 4892707{,}600m$$

Pertanto:

$$arcsen\hat{\alpha} = \frac{r_Q \cdot sen\alpha_Q}{\hat{r}} = 61{,}50300765 = 61°30'10{,}8276''\,N$$

ESERCIZIO 5

Le coordinate geodetiche di un punto T situato a Torino, riferite all'ellissoide WGS84, sono:

φ = *45° 03' 48",1186*

λ = *7° 39' 40",6046*

h = 310,764 m

I parametri dell'ellissoide WGS84 sono:

a = 6378137 m

a = 1/298,257223563 schiacciamento = (a-c)/a

e^2 = 0,006694379990 eccentricità = $(a^2-c^2)/a^2$

1) Determinare le coordinate cartesiane geocentriche.

Le coordinate cartesiane geocentriche sono espresse dalle equazioni parametriche dell'ellissoide, ottenute a loro volta dalla proiezione sugli assi X e Y dell'equazione parametrica dell'ellisse meridiana in r, e dall'equazione parametrica in Z, tutte opportunamente corrette della quota ellissoidica h.

Esse valgono:

$$X = r \cdot \cos\lambda = (N+h) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda$$

$$Y = r \cdot sen\lambda = (N+h) \cdot \cos\varphi \cdot sen\lambda$$

$$Z = \frac{\left(a \cdot (1-e^2) + h\right) \cdot sen\varphi}{W} = \left(N \cdot (1-e^2) + h\right) \cdot sen\varphi$$

Nel caso del punto T :

$$N_T = \frac{a_{WGS84}}{\sqrt{1-e^2_{WGS84} \cdot sen^2\varphi_T}} = 6388862{,}020m$$

$$X_T = (N_T + h_T) \cdot \cos\varphi_T \cdot \cos\lambda_T = 4472544{,}488m$$

$$Y_T = (N_T + h_T) \cdot \cos\varphi_T \cdot sen\lambda_T = 601634{,}185m$$

$$Z_T = \left(N_T \cdot (1-e_T{}^2) + h_T\right) \cdot sen\varphi_T = 4492545{,}119m$$

2) Partendo dalle coordinate cartesiane calcolate al punto precedente, rideterminare le coordinate geografiche mediante il procedimento di Bencini:

$R = \sqrt{X_T^2 + Y_T^2}$ = ***(distanza dell'asse polare)***

$\vartheta_0 = \arctan \dfrac{Z_T}{R \cdot \sqrt{1-e^2}}$ ***(valore di prima approssimazione della latitudine ridotta)***

$\delta\,\vartheta = \dfrac{\dfrac{Z_T}{a} \cdot \sqrt{1-e^2} + e^2 \cdot \mathrm{sen}\,\vartheta_0 - \dfrac{R}{a} \cdot \tan\vartheta_0}{\dfrac{R}{a} \cdot (1+\tan^2\vartheta_0) - e^2 \cdot \cos\vartheta_0}$ ***(correzione da apportare al valore ϑ_0)***

$\vartheta = \vartheta_0 + \delta\,\vartheta$ ***(valore corretto di seconda approssimazione della latitudine ridotta)***

Prima Iterazione

R = 4512828,148 m

ϑ_0 *= 0,784825057 rad*

$\delta\,\vartheta$ *= -1,6390157 E-07 rad*

$\vartheta = \vartheta_0 + \delta\,\vartheta$ *= 0,784824893 rad*

Seconda Iterazione

R = 4512828,148 m

$\vartheta_0 = \vartheta$ *= 0,784824893 rad*

$\delta\,\vartheta$ *= -2,695298 E-14 rad*

$\vartheta = \vartheta_0 + \delta\,\vartheta$ *= 0,784824893 rad*

Il procedimento termina in quanto il valore di ϑ si è stabilizzato.

Determinato ϑ possiamo ora calcolare le coordinate geografiche:

$\lambda = \arctan \frac{X_T}{Y_T}$ = *1,437081782 rad = 45,06336628 DEG = 45° 03' 48",1186 DMS*

$\varphi = \arctan \frac{\tan \vartheta}{\sqrt{1-e^2}}$ = *0,786504114 rad = 7,661279056 DEG = 7° 39' 40",6046 DMS*

$h = \frac{Z_T}{\mathrm{sen}\varphi} - N \cdot (1 - e^2)$ = *310,764 m*

2) Il vertice IGM del 1° ordine "SUPERGA" (asse cupola) ha le seguenti coordinate geografiche (riferiteall'ellissoide internazionale):

$\varphi_{Superga}$ = *45° 04' 48".308*
$\lambda_{Superga}$ = *- 4° 41' 03".307*

Calcolare nel vertice IGM:

- *i raggi principali di curvatura (ρ N)*
- *il raggio R della sfera locale*
- *il raggio del parallelo*

I parametri dell'ellissoide internazionale di Hayford sono:
a = 6378388 m
e^2 = 0,006722670022

$$N_{\sup erga} = \frac{a_{Hayford}}{\sqrt{1 - e^2_{Hayford} \cdot sen^2 \varphi_{\sup erga}}} = 6389165{,}17m$$

$$\rho_{\sup erga} = \frac{a_{Hayford} \cdot (1 - e^2_{Hayford})}{\sqrt{(1 - e^2_{Hayford} \cdot sen^2 \varphi_{\sup erga})^3}} = 6367676{,}65m$$

$$R_{\sup erga} = \sqrt{N_{\sup erga} \cdot \rho_{\sup erga}} = 6378411{,}861m$$

$$r_{\sup erga} = N_{\sup erga} \cdot \cos \varphi_{\sup erga} = 4511502{,}791m$$