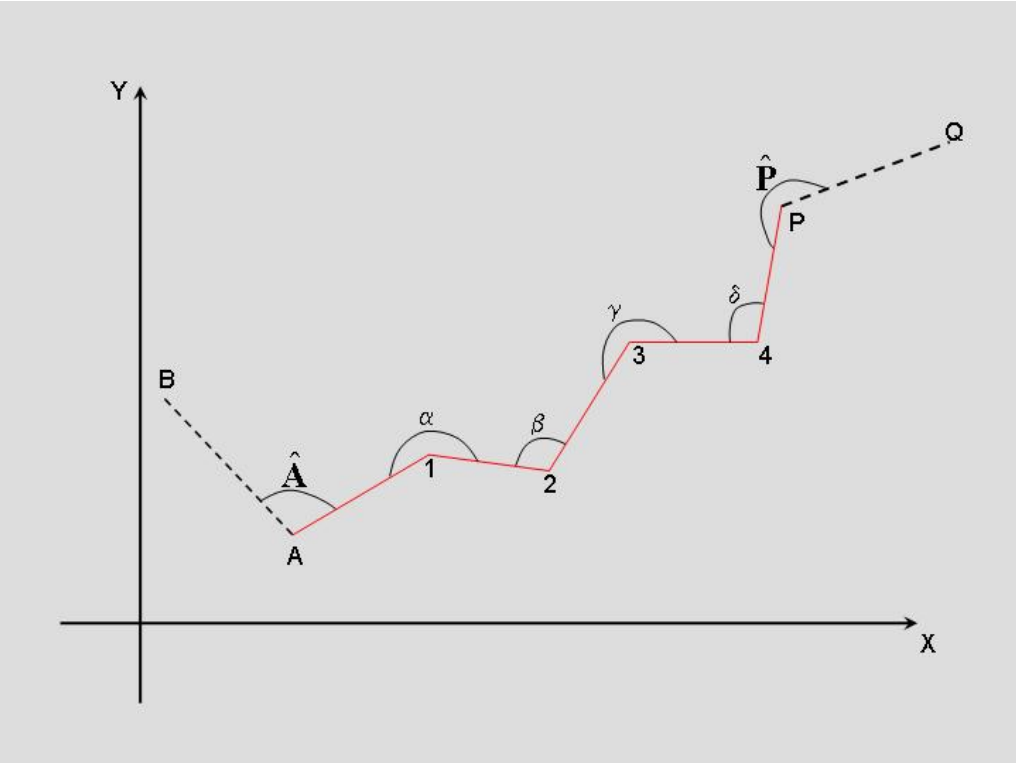
Università degli studi di Brescia
Facoltà di Ingegneria
Corso di Topografia A – Nuovo Ordinamento

Le poligonali

13 Giugno 2004

Anno Accademico 2006-2007

Poligonale aperta vincolata agli estremi



DATI

I vincoli: X_A, X_B, Y_A, Y_B, X_P, X_Q, Y_P, Y_Q

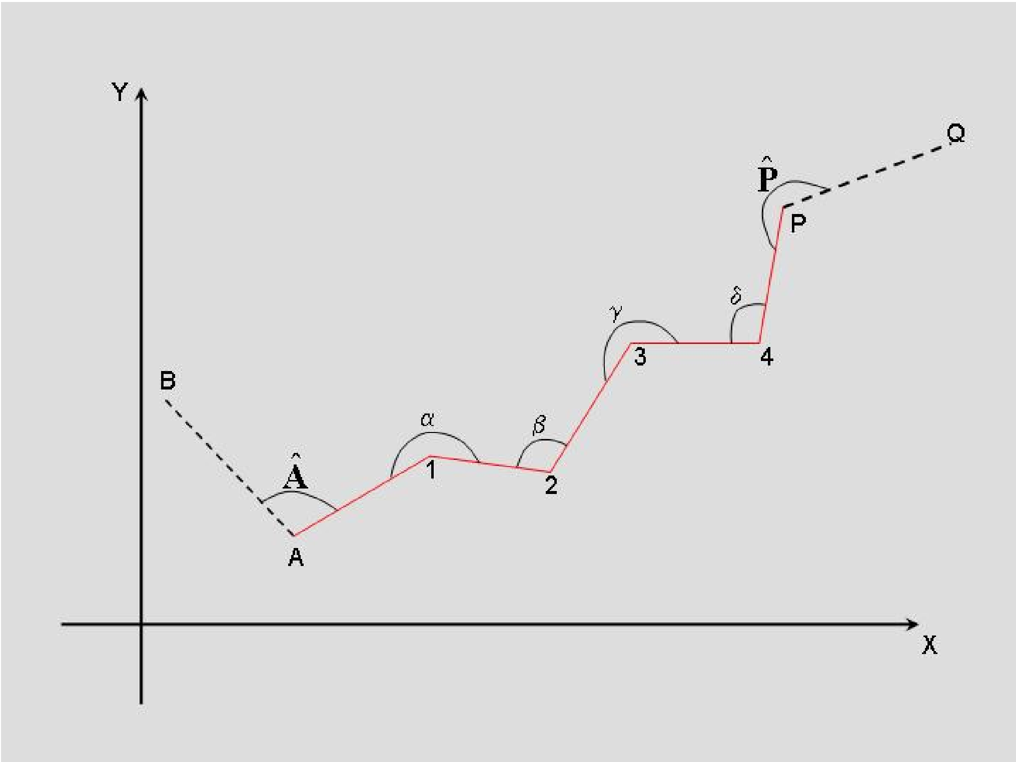
Le misure:

angoli: α, β, γ, δ, $\hat{A}$, $\hat{P}$

distanze: d_{A1}, d_{12}, d_{23}, d_{34}, d_{4P}

Poligonale aperta vincolata agli estremi

Si calcolano le direzioni di vincolo

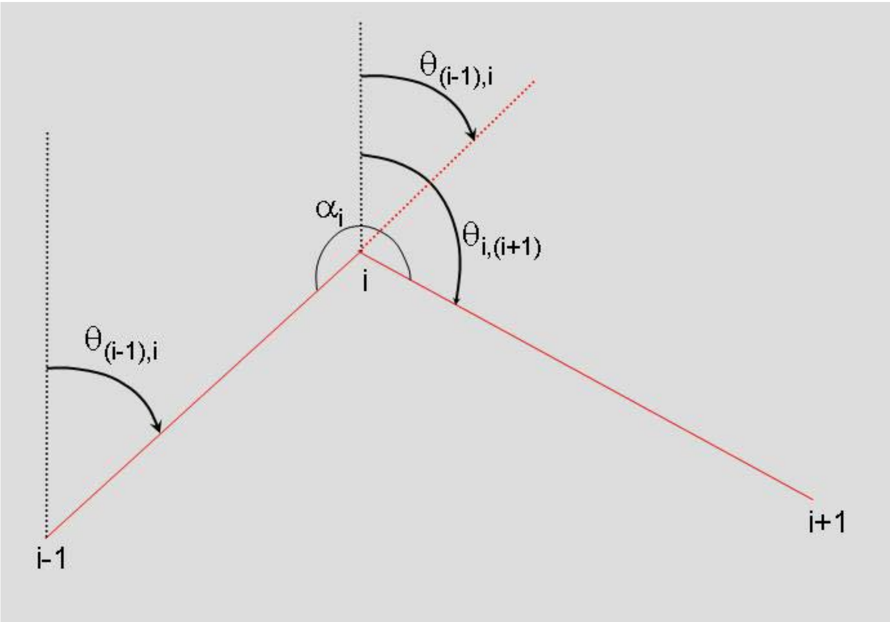


$$\overline{\theta}_{BA} = \arctan \frac{X_A - X_B}{Y_A - Y_B}$$

$$\overline{\theta}_{PQ} = \arctan \frac{X_Q - X_P}{Y_Q - Y_P}$$

Poligonale aperta vincolata agli estremi

Si propagano le direzioni fino a determinare il valore della direzione Θ_{PQ}



$$\theta_{i,i+1} = \theta_{i-1,i} + \alpha_i \pm n \cdot 200^g$$

Poligonale aperta vincolata agli estremi

Si calcolo dell'errore di chiusura angolare confrontando la direzione Θ_{PQ} calcolata con la direzione di vincolo

$$v_{\alpha} = \theta_{PQ} - \overline{\theta}_{PQ}$$

Si dovrà verificare che: $v_{\alpha} < T$

Dove: $T = 3 \cdot \sigma_{\alpha} \cdot \sqrt{n}$

n = numero degli angoli al vertice misurati

σ_{α} = precisione media delle misure angolari

Poligonale aperta vincolata agli estremi

Si calcola l'errore angolare di ogni singolo angolo al vertice misurato:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{v_\alpha}{n}$$

Si calcolano i valori angolari corretti e quindi si torna a ricalcolare le direzioni compensate come segue:

$$\hat{A}^* = \hat{A} - \varepsilon_\alpha$$

$$\alpha^* = \alpha - \varepsilon_\alpha$$

$$\beta^* = \beta - \varepsilon_\alpha$$

$$\gamma^* = \gamma - \varepsilon_\alpha$$

$$\delta^* = \delta - \varepsilon_\alpha$$

$$\hat{P}^* = \hat{P} - \varepsilon_\alpha$$

$$\theta^*_{i,i+1} = \theta^*_{i-1,i} + \alpha^*_i \pm n \cdot 200^g$$

Poligonale aperta vincolata agli estremi

Errore di chiusura laterale nella componente X:

$$\varepsilon_X = \sum_i d_{i,i+1} \cdot \mathrm{sen}\,\vartheta^*_{i,i+1} - (X_P - X_A)$$

Errore di chiusura laterale nella componente Y:

$$\varepsilon_Y = \sum_i d_{i,i+1} \cdot \cos\vartheta^*_{i,i+1} - (Y_P - Y_A)$$

Poligonale aperta vincolata agli estremi

Errore di chiusura laterale risultante:

$$E = \sqrt{\varepsilon_X^2 + \varepsilon_Y^2}$$

Tolleranza lineare:

$$T = 0{,}015 \cdot \sqrt{\sum_i d_i}$$

$\sum_i d_i$ **= sviluppo lineare della poligonale**

Verificare che: $$E < T$$

Poligonale aperta vincolata agli estremi

Errori laterali nella componente X e Y per unità di misura

$$\mu_X = \frac{\varepsilon_X}{\sum_i d_i} \qquad \mu_Y = \frac{\varepsilon_Y}{\sum_i d_i}$$

Componenti di ogni singolo lato d_i, corrette dall'errore di chiusura laterale in maniera direttamente proporzionale alla distanza:

$$\left(d_{i,i+1} \cdot \mathrm{sen}\theta^*_{i,i+1}\right)_C = d_{i,i+1} \cdot \mathrm{sen}\theta^*_{i,i+1} - \mu_X \cdot d_{i,i+1}$$

$$\left(d_{i,i+1} \cdot \cos\theta^*_{i,i+1}\right)_C = d_{i,i+1} \cdot \cos\theta^*_{i,i+1} - \mu_Y \cdot d_{i,i+1}$$

Poligonale aperta vincolata agli estremi

Si dovrà verificare che:

$$\sum_{i}\left(d_{i,i+1}\cdot \mathrm{sen}\theta^{*}_{i,i+1}\right)_{C}-(X_{P}-X_{A})=0$$

$$\sum_{i}\left(d_{i,i+1}\cdot \cos\theta^{*}_{i,i+1}\right)_{C}-(Y_{P}-Y_{A})=0$$

Poligonale aperta vincolata agli estremi

Si calcolano le coordinate compensate dei vertici

$$X_1 = X_A + \left(d_{A1} \cdot \text{sen}\theta^*_{A1}\right)_C \qquad Y_1 = Y_A + \left(d_{A1} \cdot \cos\theta^*_{A1}\right)_C$$

$$X_2 = X_1 + \left(d_{12} \cdot \text{sen}\theta^*_{12}\right)_C \qquad Y_2 = Y_1 + \left(d_{12} \cdot \cos\theta^*_{12}\right)_C$$

$$X_3 = X_2 + \left(d_{23} \cdot \text{sen}\theta^*_{23}\right)_C \qquad Y_3 = Y_2 + \left(d_{23} \cdot \cos\theta^*_{23}\right)_C$$

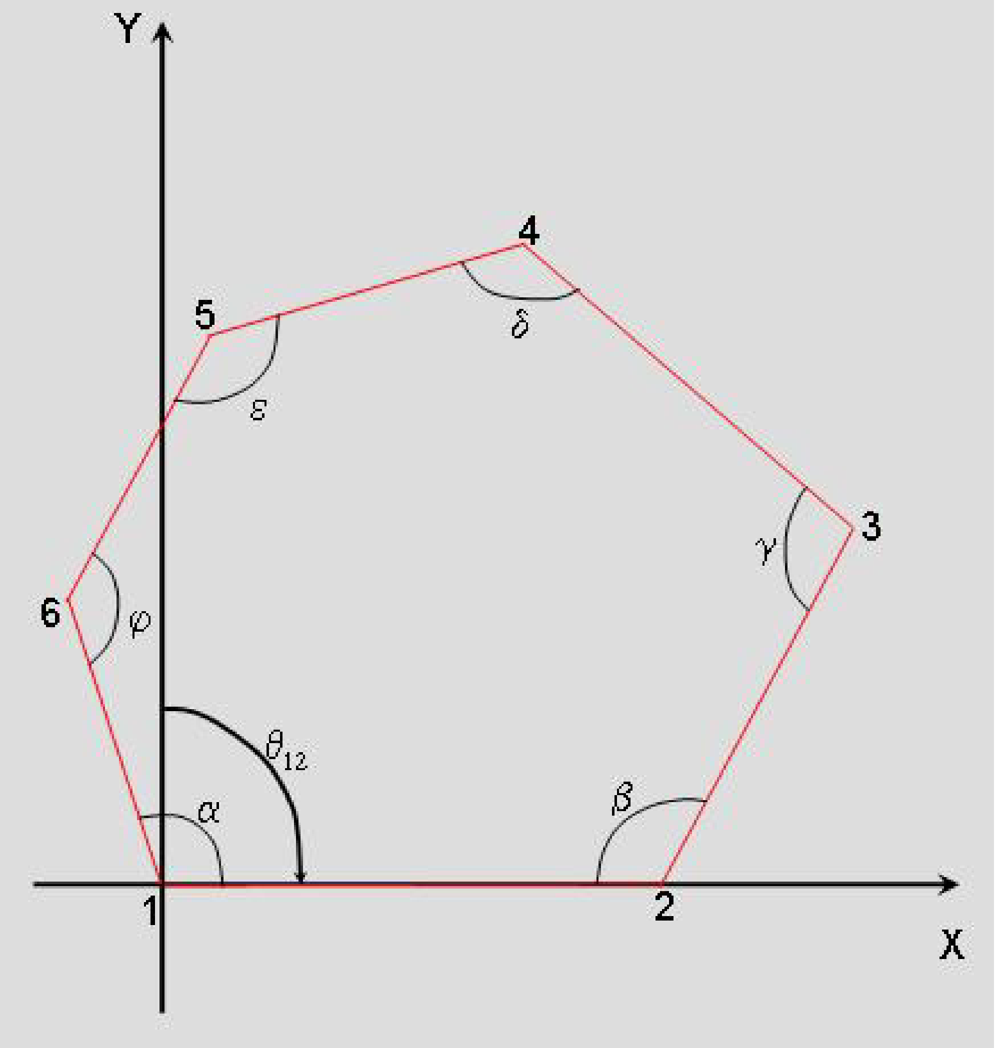
$$X_4 = X_3 + \left(d_{34} \cdot \text{sen}\theta^*_{34}\right)_C \qquad Y_4 = Y_3 + \left(d_{34} \cdot \cos\theta^*_{34}\right)_C$$

$$X_P = X_4 + \left(d_4 \cdot \text{sen}\theta^*_{4P}\right)_C \qquad Y_P = Y_4 + \left(d_{4P} \cdot \cos\theta^*_{4P}\right)_C$$

In generale:

$$X_{i+1} = X_i + \left(d_{i,i+1} \cdot \text{sen}\theta^*_{i,i+1}\right)_C \qquad Y_{i+1} = Y_i + \left(d_{i,i+1} \cdot \cos\theta^*_{i,i+1}\right)_C$$

Poligonale chiusa.



DATI

Le misure:

angoli: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$

distanze: $d_{12}, d_{23}, d_{34}, d_{45}, d_{56}, d_{61}$

Viene vincolata la traslazione imponendo che il punto P_1 coincida con l'origine del sistema di riferimento

Viene vincolata la rotazione imponendo che la direzione θ_{12} sia pari a 100^g.

Poligonale chiusa

Si calcola l'errore di chiusura angolare osservando che, in un poligono chiuso di n lati, la somma degli angoli interni è pari a: (n-2)200^g

$$v_\alpha = (n-2)\cdot 200^g - \sum_i \alpha_i$$

Si dovrà verificare che: $V_\alpha < T$

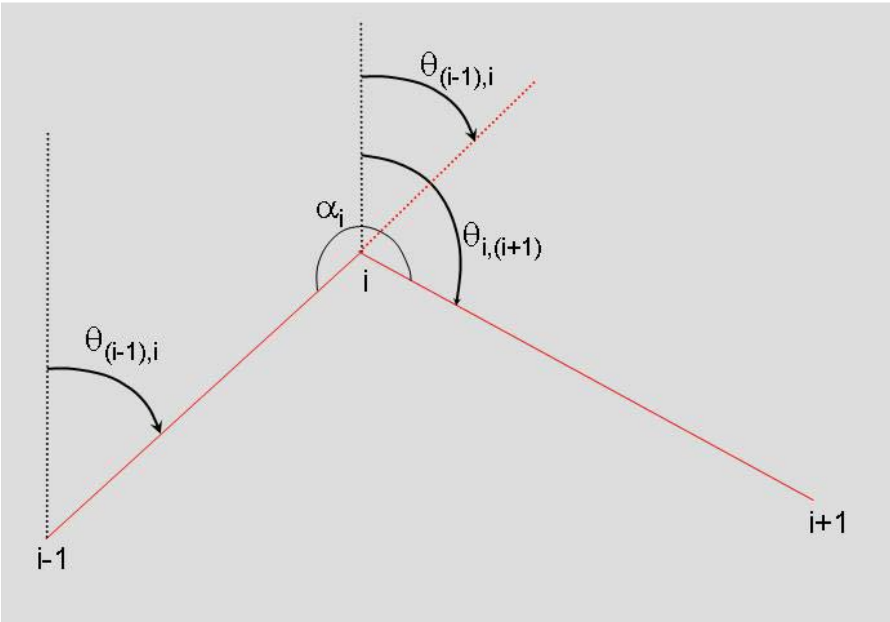
Dove: $T = 3 \cdot \sigma_\alpha \cdot \sqrt{n}$

n = numero degli angoli al vertice misurati

σ_α **= precisione media delle misure angolari**

Poligonale chiusa

Si calcolano gli angoli di direzione



$$\theta^*_{i,i+1} = \theta^*_{i-1,i} + \alpha^*_i \pm n \cdot 200^g$$

$$\alpha^*_i = \alpha_i + \varepsilon_\alpha$$

In questo caso si utilizza da subito il valore angolare corretto:

Poligonale chiusa

Si calcola l'errore angolare di ogni singolo angolo al vertice misurato:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{v_\alpha}{n}$$

Su alcuni testi, anziché correggere gli α_i, si usa correggere direttamente le direzioni:

$$\theta^*_{12} = \theta_{12} + \varepsilon_\alpha \qquad \theta^*_{45} = \theta_{4P} + 4 \cdot \varepsilon_\alpha$$

$$\theta^*_{23} = \theta_{23} + 2 \cdot \varepsilon_\alpha \qquad \theta^*_{56} = \theta_{56} + 5 \cdot \varepsilon_\alpha$$

$$\theta^*_{34} = \theta_{34} + 3 \cdot \varepsilon_\alpha \qquad \theta^*_{61} = \theta_{61} + 6 \cdot \varepsilon_\alpha$$

Non ci sono differenze!!!! Il risultato finale deve essere uguale

Poligonale chiusa

Si noti inoltre che a compensazione angolare avvenuta, dovrà essere verificata la seguente uguaglianza:

$$\sum_{i} \alpha_{i}^{*} = (n-2) \cdot 200^{g}$$

Poligonale chiusa

Si calcola l'errore di chiusura laterale osservando che il punto di partenza e di arrivo coincidono quindi:

Errore di chiusura laterale nella componente X:

$$\varepsilon_X = \sum_i d_{i,i+1} \cdot \mathrm{sen}\,\vartheta^*_{i,i+1}$$

Errore di chiusura laterale nella componente Y:

$$\varepsilon_Y = \sum_i d_{i,i+1} \cdot \cos\vartheta^*_{i,i+1}$$

Poligonale chiusa

Errore di chiusura laterale risultante:

$$E = \sqrt{\varepsilon_X^2 + \varepsilon_Y^2}$$

Tolleranza lineare:

$$T = 0{,}015 \cdot \sqrt{\sum_i d_i}$$

$\sum_i d_i$ **= sviluppo lineare della poligonale**

Verificare che: $E < T$

Poligonale chiusa

Errori laterali nella componente X e Y per unità di misura

$$\mu_X = \frac{\varepsilon_X}{\sum_i d_i} \qquad \mu_Y = \frac{\varepsilon_Y}{\sum_i d_i - d_{12}}$$

Si osservi che, avendo vincolato l'orientamento della poligonale (θ_{12} = 100^g), compensare la Y del punto 2 significherebbe ottenere un risultato incongruente col vincolo imposto. Per questo motivo, nella formulazione di μ_Y, la lunghezza del primo lato viene tolta dallo sviluppo lineare della poligonale

Poligonale chiusa

Si procede alla compensazione laterale delle componenti di ogni singolo lato d_i che vengono corrette dall'errore di chiusura laterale in maniera direttamente proporzionale alla distanza:

$$\left(d_{i,i+1} \cdot \operatorname{sen}\theta^*_{i,i+1}\right)_C = d_{i,i+1} \cdot \operatorname{sen}\theta^*_{i,i+1} - \mu_X \cdot d_{i,i+1}$$

$$\left(d_{i,i+1} \cdot \cos\theta^*_{i,i+1}\right)_C = d_{i,i+1} \cdot \cos\theta^*_{i,i+1} - \mu_Y \cdot d_{i,i+1}$$

Si dovrà verificare che:

$$\sum_i \left(d_{i,i+1} \cdot \operatorname{sen}\theta^*_{i,i+1}\right)_C = 0 \qquad \sum_i \left(d_{i,i+1} \cdot \cos\theta^*_{i,i+1}\right)_C = 0$$

Poligonale chiusa

Si calcolano le coordinate compensate dei vertici

Si osservi che, a causa dei vincoli imposti:

$$X_1 = Y_1 = 0{,}000$$

$$Y_2 = 0{,}000$$

$$X_2 = X_1 + \left(d_{12} \cdot \mathrm{sen}\theta^*_{12}\right)_C$$

$$X_3 = X_2 + \left(d_{23} \cdot \mathrm{sen}\theta^*_{23}\right)_C$$

$$X_4 = X_3 + \left(d_{34} \cdot \mathrm{sen}\theta^*_{34}\right)_C$$

$$X_5 = X_4 + \left(d_{45} \cdot \mathrm{sen}\theta^*_{45}\right)_C$$

$$X_6 = X_5 + \left(d_{56} \cdot \mathrm{sen}\theta^*_{56}\right)_C$$

$$Y_3 = Y_2 + \left(d_{23} \cdot \cos\theta^*_{23}\right)_C$$

$$Y_4 = Y_3 + \left(d_{34} \cdot \cos\theta^*_{34}\right)_C$$

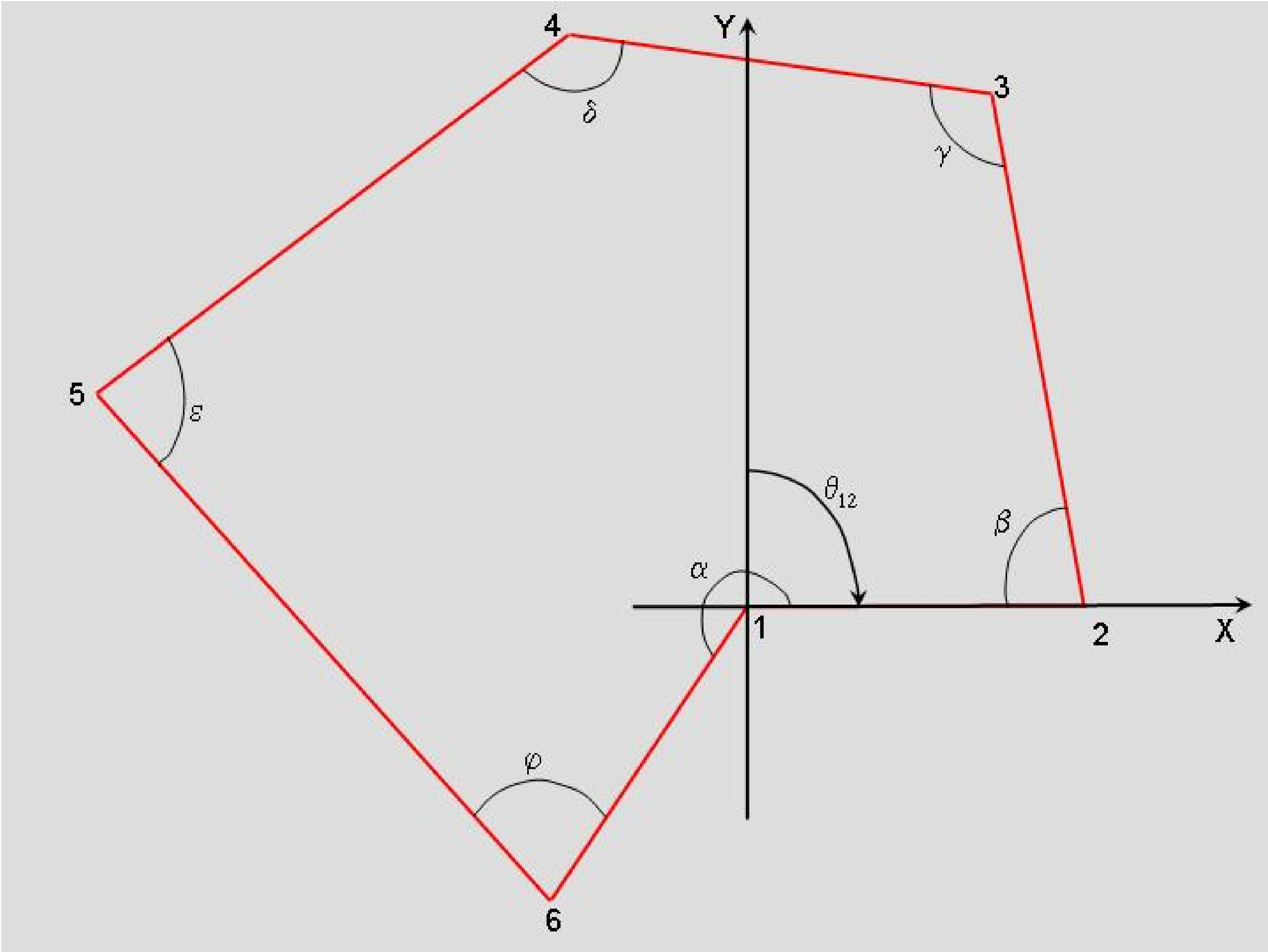
$$Y_5 = Y_4 + \left(d_{45} \cdot \cos\theta^*_{45}\right)_C$$

$$Y_6 = Y_5 + \left(d_{56} \cdot \cos\theta^*_{56}\right)_C$$

In generale:

$$X_{i+1} = X_i + \left(d_{i,i+1} \cdot \mathrm{sen}\theta^*_{i,i+1}\right)_C \qquad Y_{i+1} = Y_i + \left(d_{i,i+1} \cdot \cos\theta^*_{i,i+1}\right)_C$$

ESERCIZIO



Angoli misurati α_i [gon]

α	241,4359
β	93,6579
γ	119,9538
δ	143,1109
ε	94,1403
φ	107,6989

Distanze misurate [m]

d_{12}	48,354
d_{23}	76,696
d_{34}	60,184
d_{45}	110,576
d_{56}	79,295
d_{61}	61,531

Calcolo errore di chiusura angolare

n = numero dei lati = numero angoli = 6   quindi:

$$(n-2)\cdot 200^g = 800^g$$

$$\sum_i \alpha_i = 799^g{,}9976$$

$$v_\alpha = (n-2)\cdot 200^g - \sum_i \alpha_i$$

$$v_\alpha = 800^g - 799^g{,}9976 = 0^g{,}0024 = 24^{cc}$$

Tolleranza angolare

$\sigma_\alpha = 10^{cc}$ **DATO DEL PROBLEMA**

$$T = 3\cdot\sigma_\alpha\cdot\sqrt{n}$$

$$T = 3\cdot\sigma_\alpha\cdot\sqrt{n} = 3\cdot 10^{cc}\cdot\sqrt{6} = 73^{cc}$$

$v_\alpha < T$ **Verificata**

Compensazione angolare empirica

$$\varepsilon_\alpha = \frac{v_\alpha}{n} = \frac{0^g,0024}{6} = 0^g,0004 = 4^{cc}$$

$$\alpha^* = \alpha + \varepsilon_\alpha = 241^g,4359 + 0^g,0004 = 241^g,4363$$

$$\beta^* = \beta + \varepsilon_\alpha = 93^g,6579 + 0^g,0004 = 93^g,6583$$

$$\gamma^* = \gamma + \varepsilon_\alpha = 119^g,9538 + 0^g,0004 = 119^g,9542$$

$$\delta^* = \delta + \varepsilon_\alpha = 143^g,1109 + 0^g,0004 = 143^g,1113$$

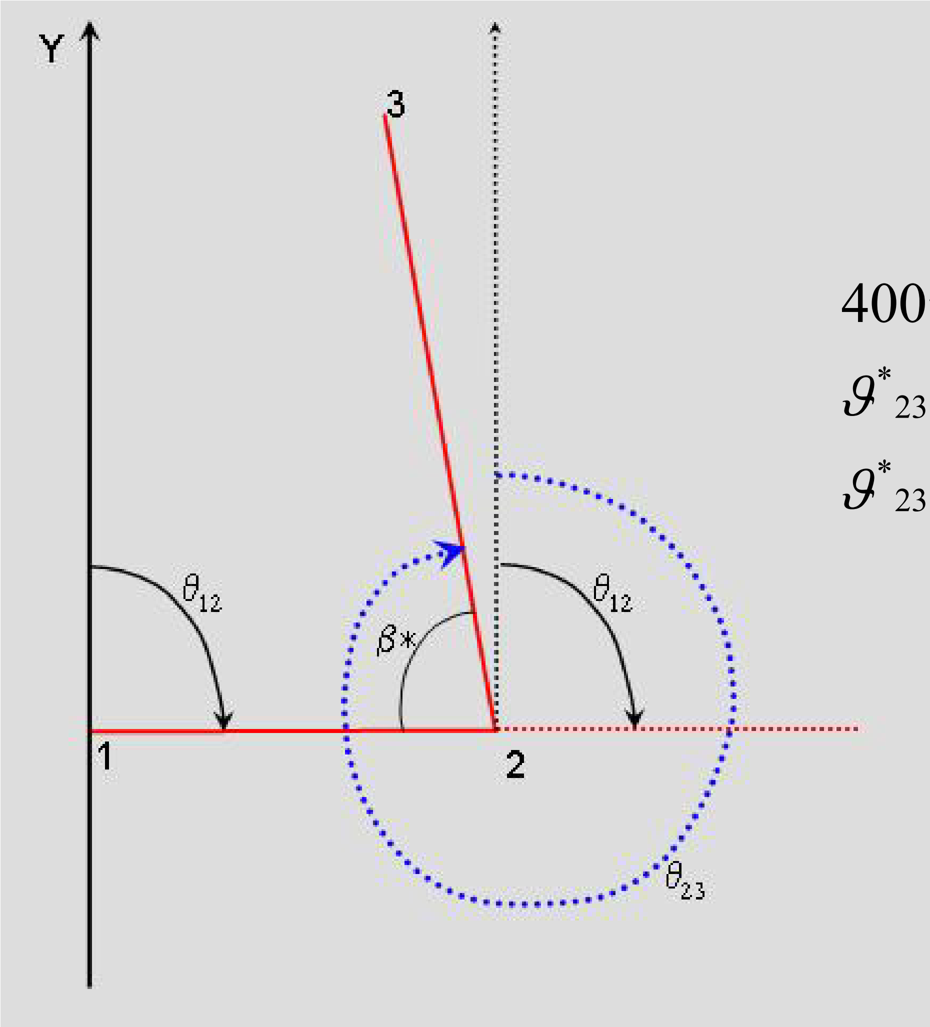
$$\varepsilon^* = \varepsilon + \varepsilon_\alpha = 94^g,1403 + 0^g,0004 = 94^g,1407$$

$$\varphi^* = \varphi + \varepsilon_\alpha = 107^g,6989 + 0^g,0004 = 107^g,6993$$

Dopo la correzione, verificare che

$$\sum_i \alpha_i^* = 800^g$$

Calcolo delle direzioni

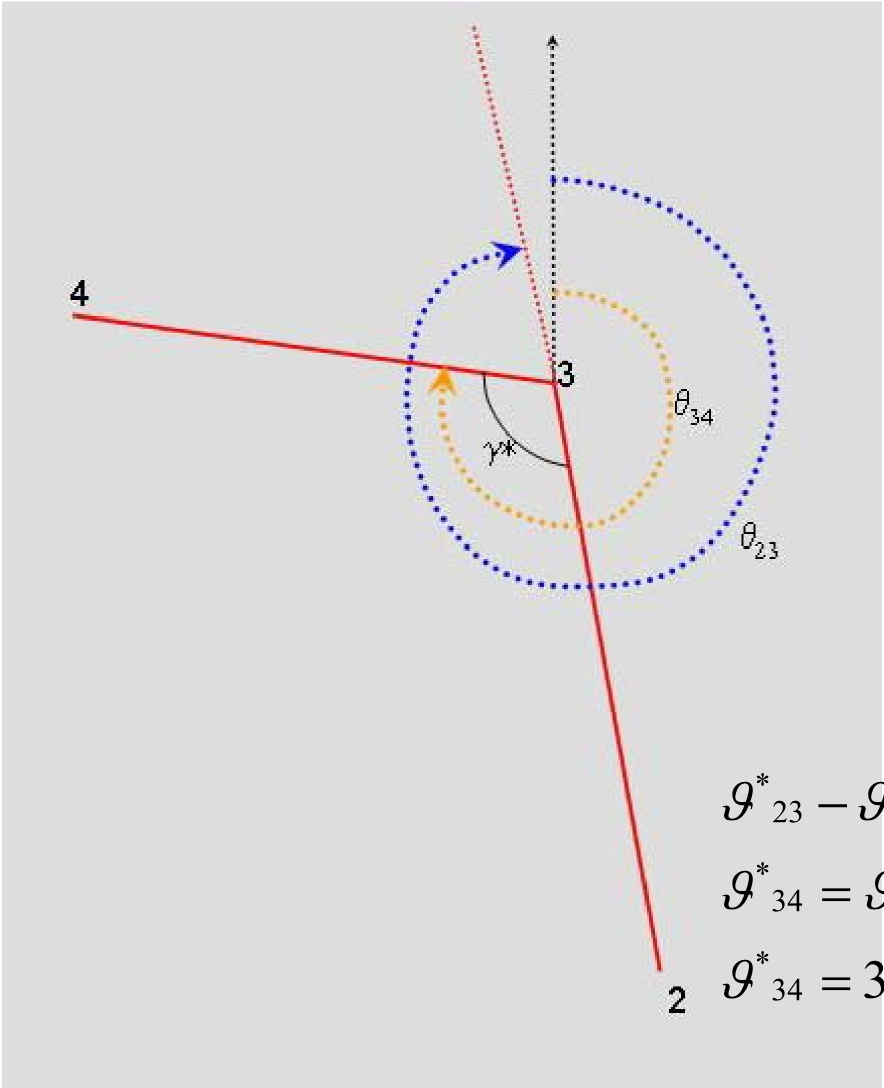


$$400^g - \vartheta^*_{23} = 200^g - (\vartheta^*_{12} + \beta^*)$$

$$\vartheta^*_{23} = \vartheta^*_{12} + \beta^* + 200^g$$

$$\vartheta^*_{23} = 100^g + 93^g{,}6583 + 200^g = 393^g{,}6583$$

Calcolo delle direzioni

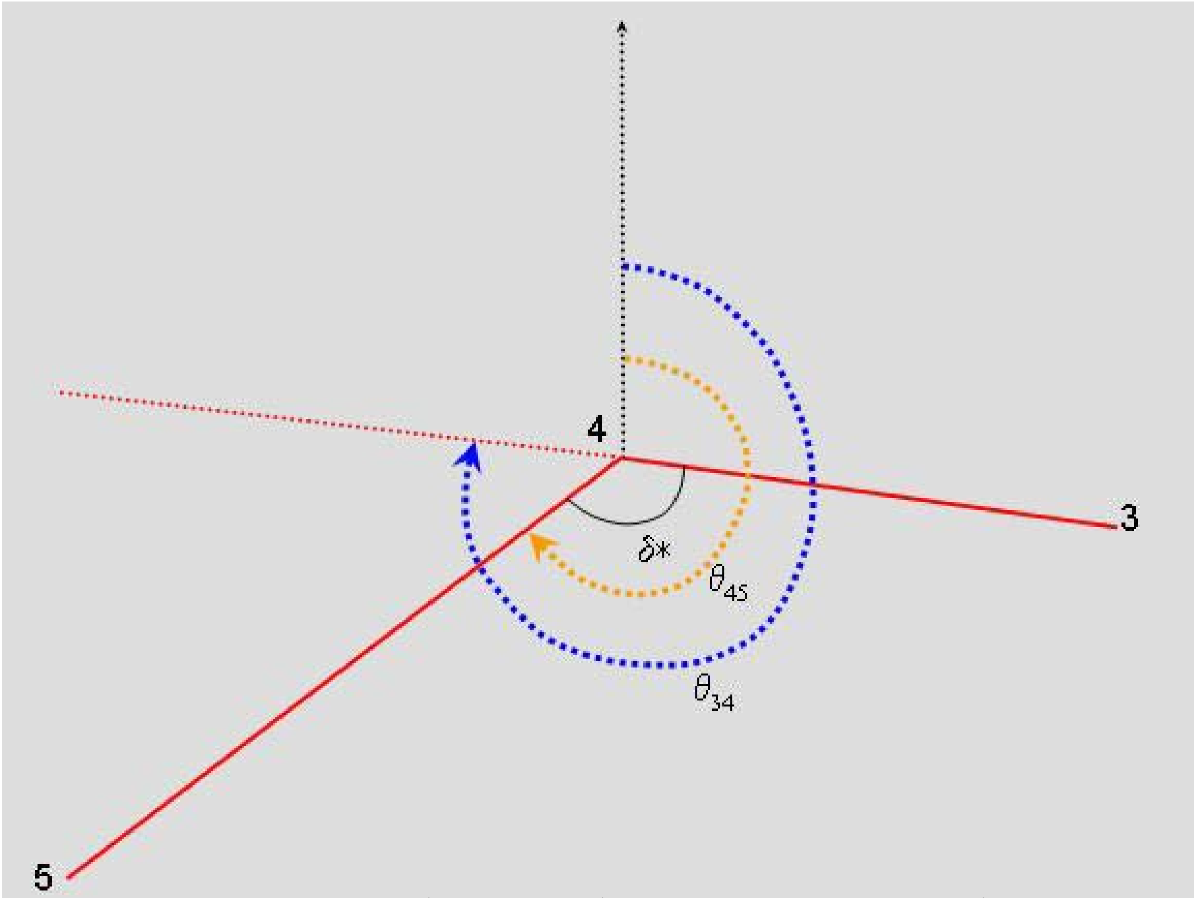


$$\vartheta^*_{23} - \vartheta^*_{34} = 200^g - \gamma^*$$

$$\vartheta^*_{34} = \vartheta^*_{23} + \gamma^* - 200^g$$

$$\vartheta^*_{34} = 393^g{,}6583 + 119^g{,}9542 - 200^g = 313^g{,}6124$$

Calcolo delle direzioni

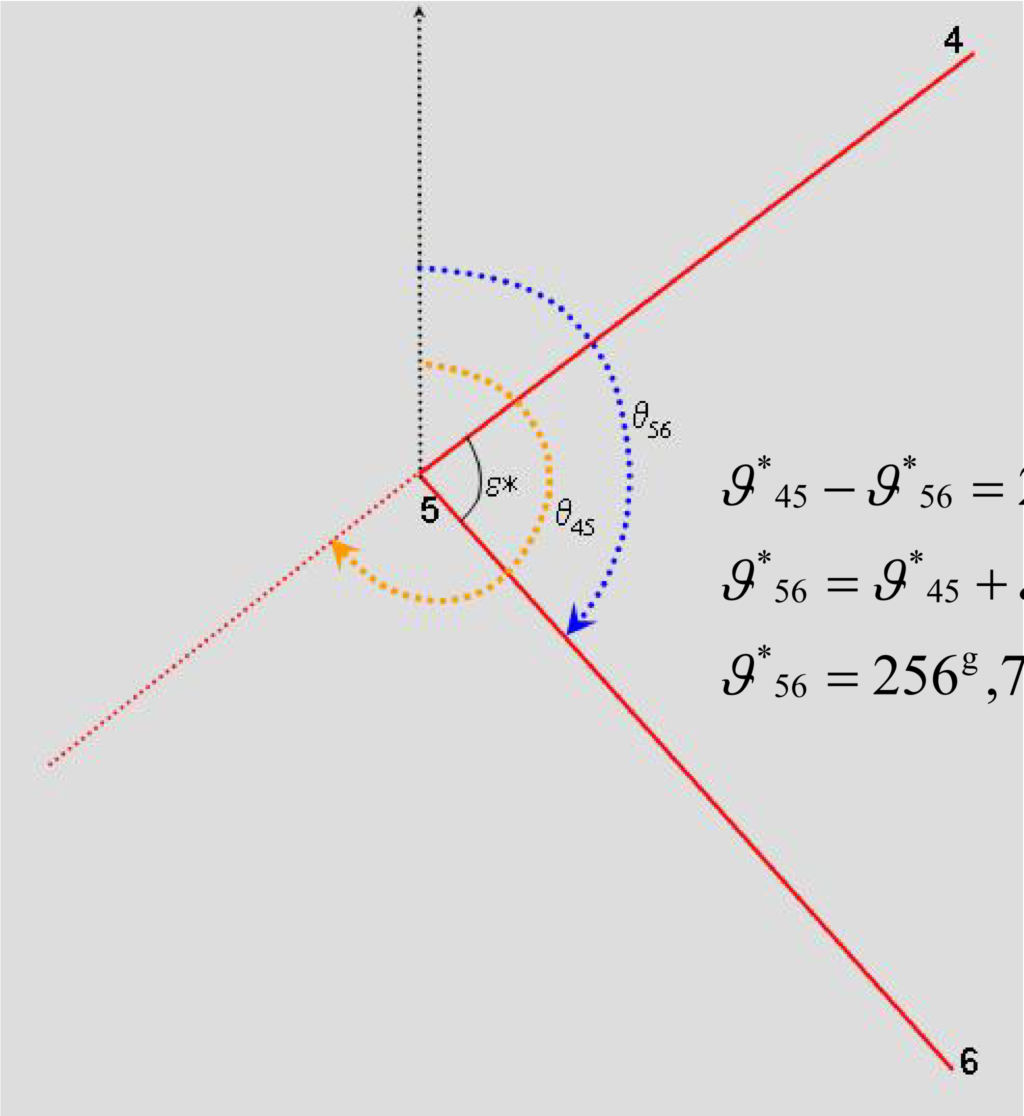


$$\vartheta^*{}_{34} - \vartheta^*{}_{45} = 200^g - \delta^*$$

$$\vartheta^*{}_{45} = \vartheta^*{}_{34} + \delta^* - 200^g$$

$$\vartheta^*{}_{45} = 313^g{,}6124 + 143^g{,}1113 - 200^g = 256^g{,}7237$$

Calcolo delle direzioni

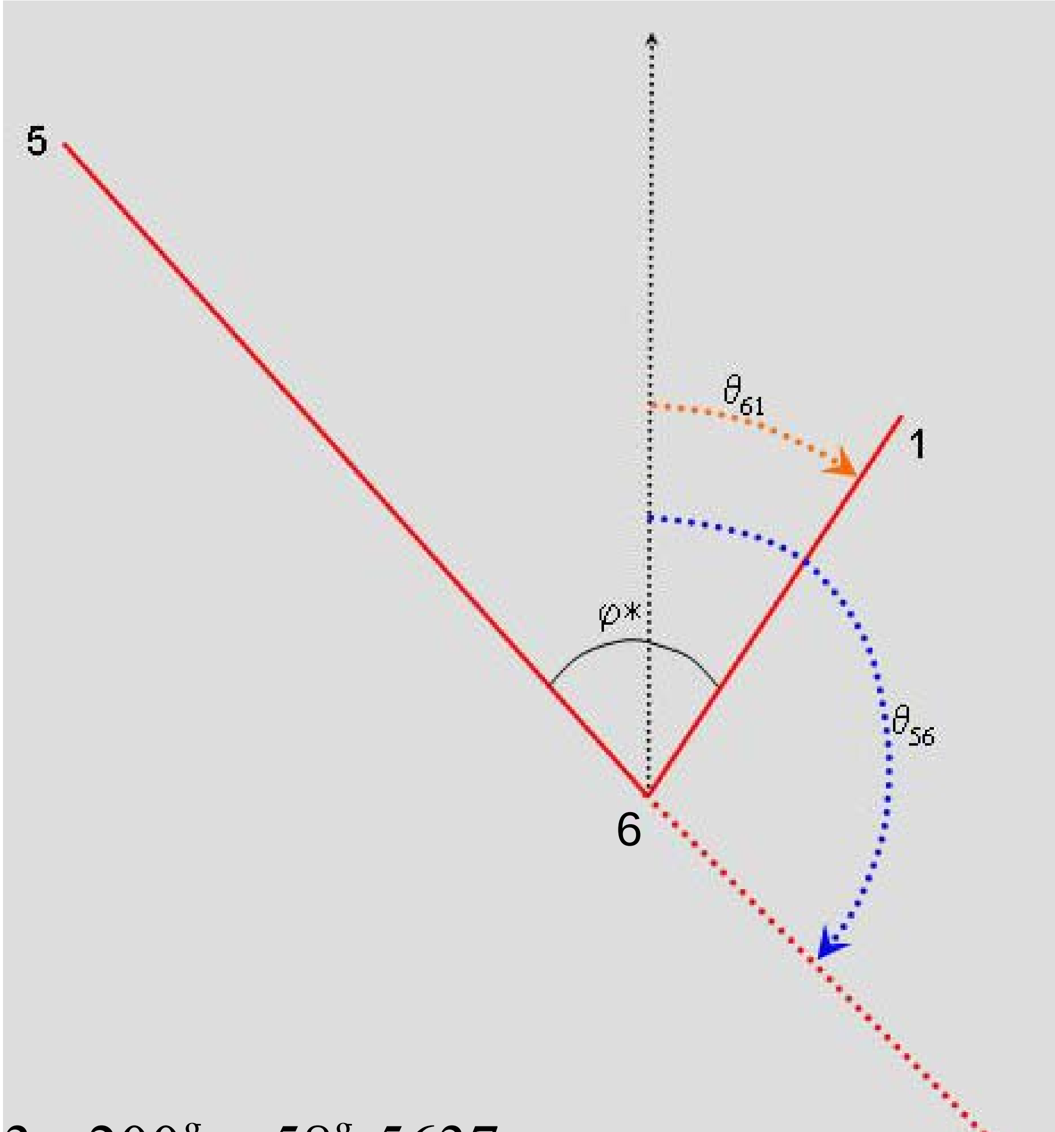


$$\vartheta^*{}_{45} - \vartheta^*{}_{56} = 200^g - \varepsilon^*$$

$$\vartheta^*{}_{56} = \vartheta^*{}_{45} + \varepsilon^* - 200^g$$

$$\vartheta^*{}_{56} = 256^g{,}7237 + 94^g{,}1407 - 200^g = 150^g{,}8644$$

Calcolo delle direzioni



$$\vartheta^*_{56} - \vartheta^*_{61} = 200^g - \varphi^*$$

$$\vartheta^*_{61} = \vartheta^*_{56} + \varphi^* - 200^g$$

$$\vartheta^*_{61} = 150^g{,}8644 + 107^g{,}6993 - 200^g = 58^g{,}5637$$

Calcolo dell'errore di chiusura laterale

lato	$d_{i,i+1} \cdot \operatorname{sen} \vartheta^*_{i,i+1}$	$d_{i,i+1} \cdot \cos \vartheta^*_{i,i+1}$
1-2	48,354	0,000
2-3	-7,628	76,316
3-4	-58,813	12,771
4-5	-85,996	-69,511
5-6	55,304	-56,826
6-1	48,951	37,281

Componenti espresse in metri di ciascun lato della poligonale

Calcolo dell'errore di chiusura laterale

$$\varepsilon_X = \sum_i d_{i,i+1} \cdot \operatorname{sen} \vartheta^*_{i,i+1} = 0{,}172\ \text{m}$$

$$\varepsilon_Y = \sum_i d_{i,i+1} \cdot \cos \vartheta^*_{i,i+1} = 0{,}031\ \text{m}$$

$$E = \sqrt{\varepsilon_X^2 + \varepsilon_Y^2} = \sqrt{0{,}172^2 + 0{,}031^2} = 0{,}174\ \text{m}$$

Verifica dei limiti di tolleranza

$$T = 0{,}015 \cdot \sqrt{\sum_i d_i}$$

$$\sum_i d_i = 48{,}354 + 76{,}696 + 60{,}184 + 110{,}576 + 79{,}295 + 61{,}531 = 436{,}636\ \text{m}$$

$$T = 0{,}015 \cdot \sqrt{436{,}636} = 0{,}313\ \text{m}$$

$$E < T$$ **Verificata**

Errori laterali nella componente X e Y per unità di misura

$$\mu_X = \frac{\varepsilon_X}{\sum_i d_i} = \frac{0,172}{436,636} = 0,00039320$$

$$\mu_Y = \frac{\varepsilon_Y}{\sum_i d_i - d_{12}} = \frac{0,031}{388,282} = 0,00007881$$

Compensazione laterale con errore direttamente proporzionale alla lunghezza del lato

$$\left(d_{i,i+1} \cdot \mathrm{sen}\theta^*_{i,i+1}\right)_C = d_{i,i+1} \cdot \mathrm{sen}\theta^*_{i,i+1} - \mu_X \cdot d_{i,i+1}$$

$$\left(d_{i,i+1} \cdot \cos\theta^*_{i,i+1}\right)_C = d_{i,i+1} \cdot \cos\theta^*_{i,i+1} - \mu_Y \cdot d_{i,i+1}$$

Calcolo delle componenti corrette di ciascun lato

lato	$\left(d_{i,i+1} \cdot \operatorname{sen} \vartheta^{*}_{i,i+1}\right)_C$	$\left(d_{i,i+1} \cdot \cos \vartheta^{*}_{i,i+1}\right)_C$
1-2	48,335	0,000
2-3	-7,658	76,310
3-4	-58,837	12,766
4-5	-86,039	-69,519
5-6	55,272	-56,832
6-1	48,927	37,276

Componenti di ciascun lato della poligonale espresse in metri, corrette dall’errore laterale di chiusura.

Se la compensazione laterale è andata a buon fine, si dovrà verificare che:

$$\varepsilon_X = \sum_i d_{i,i+1} \cdot \operatorname{sen} \vartheta^*_{i,i+1} = 0{,}000\ \mathrm{m}$$

$$\varepsilon_Y = \sum_i d_{i,i+1} \cdot \cos \vartheta^*_{i,i+1} = 0{,}000\ \mathrm{m}$$

Calcolo delle coordinate finali compensate

$$X_{i+1} = X_i + \left(d_{i,i+1} \cdot \text{sen}\theta^*_{i,i+1}\right)_C \qquad Y_{i+1} = Y_i + \left(d_{i,i+1} \cdot \cos\theta^*_{i,i+1}\right)_C$$

$$X_1 = 0{,}000$$
$$X_2 = 0{,}000 + 48{,}335 = 48{,}335\ \text{m}$$
$$X_3 = 48{,}335 - 7{,}658 = 40{,}677\ \text{m}$$
$$X_4 = 40{,}677 - 58{,}837 = -18{,}160\ \text{m}$$
$$X_5 = -18{,}160 - 86{,}039 = -104{,}199\ \text{m}$$
$$X_6 = -104{,}199 + 55{,}272 = -48{,}927\ \text{m}$$
$$X_1 = -48{,}927 + 48{,}927 = 0{,}000\ \text{m}$$

$$Y_1 = 0{,}000$$
$$Y_2 = 0{,}000$$
$$Y_3 = 0{,}000 + 76{,}310 = 76{,}310\ \text{m}$$
$$Y_4 = 76{,}310 + 12{,}766 = 89{,}076\ \text{m}$$
$$Y_5 = 89{,}076 - 69{,}519 = 19{,}556\ \text{m}$$
$$Y_6 = 19{,}556 - 56{,}832 = -37{,}276\ \text{m}$$
$$Y_1 = -37{,}276 + 37{,}276 = 0{,}000\ \text{m}$$

Esercizio: misura e calcolo di un angolo al vertice di una poligonale

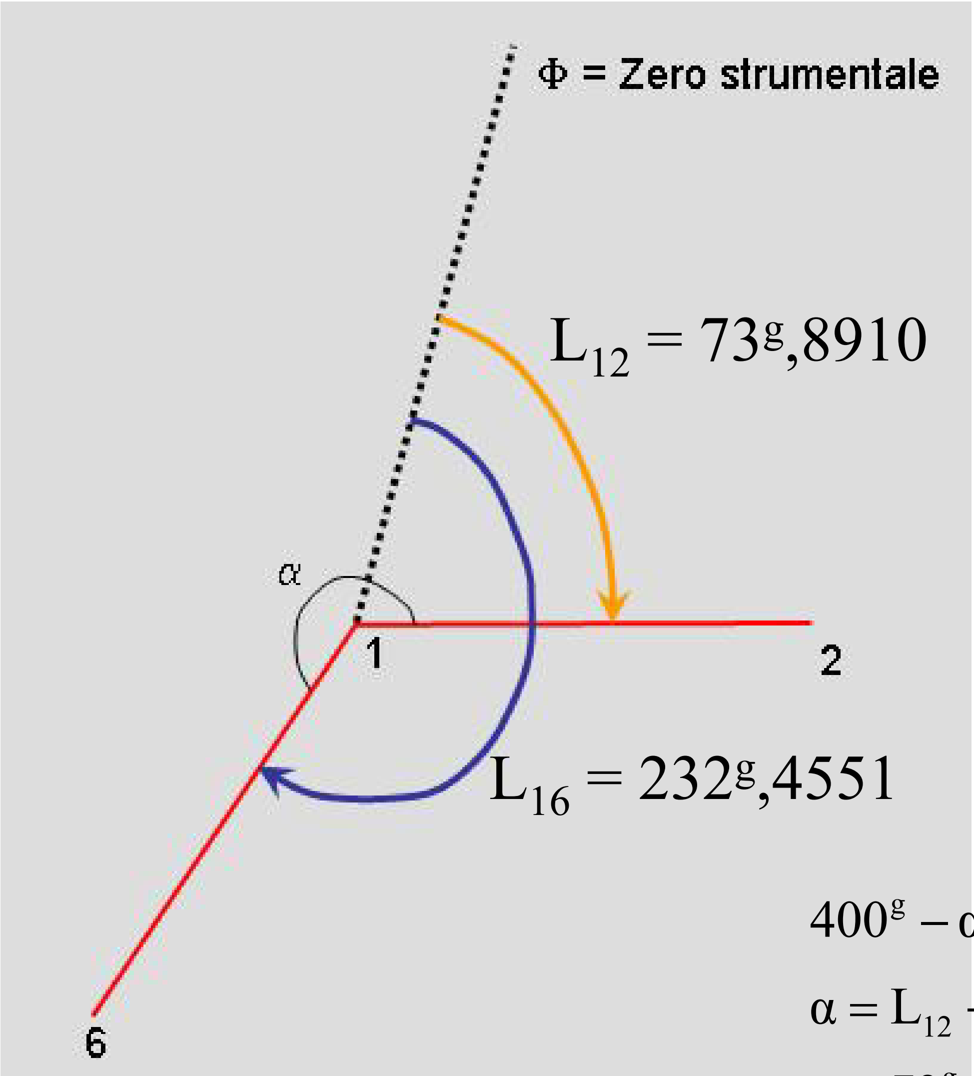
Dato il seguente libretto delle misure, calcolare l'angolo a al vertice 1 della poligonale dell'esercizio precedente.

Pstaz.	**Pcoll.**	**Pos. I**	**Pos. II**	**Bessel**
1	6	$232^g,4543$	$32^g,4559$	$232^g,4551$
1	2	$73^g,8900$	$273^g,8920$	$73^g,8910$

Ricordare la regola di Bessel

$$L = \frac{L_I + L_{II} \pm 200^g}{2}$$

Graficamente



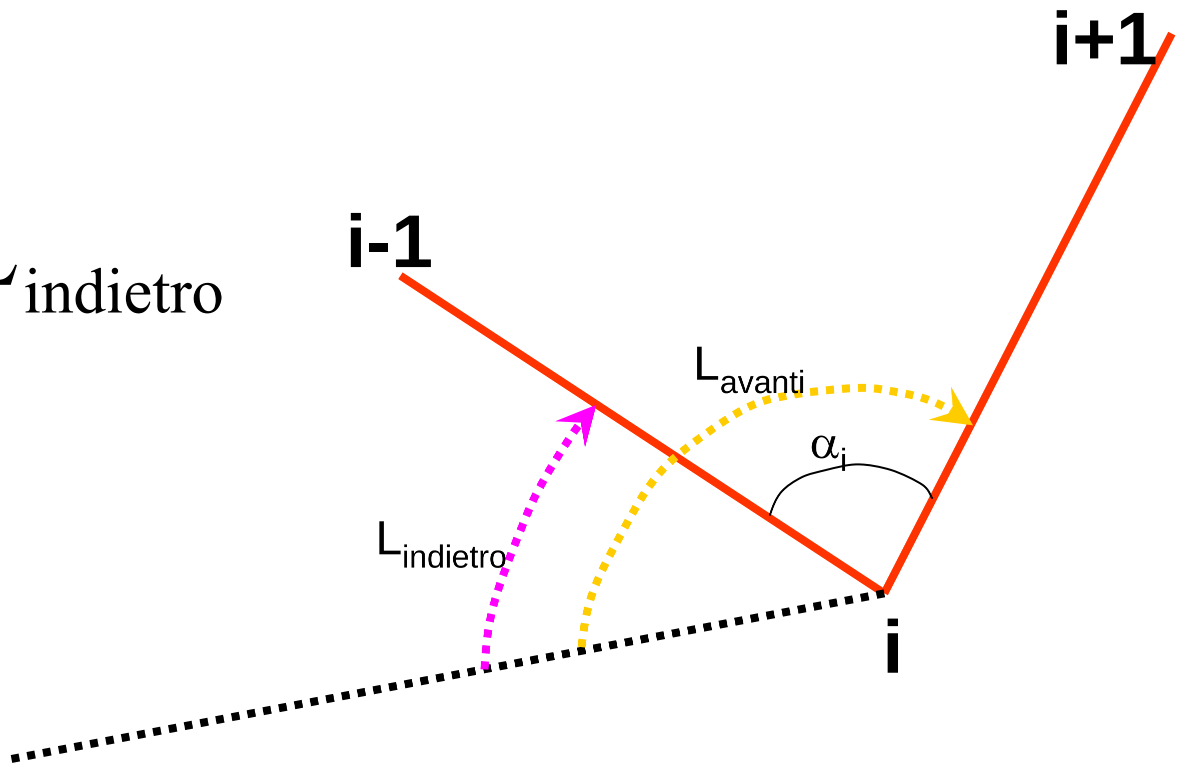
$$400^g - \alpha = L_{16} - L_{12}$$

$$\alpha = L_{12} - L_{16} + 400^g$$

$$\alpha = 73^g{,}8910 - 232^g{,}4551 + 400^g = 241^g{,}4359$$

In generale

$$\alpha_i = L_{avanti} - L_{indietro}$$



Nota: in questo caso, con L si è indicata una lettura angolare espressa in gradi centesimali.