Poligonali

(Estratto dal testo Inghilleri - Topografia Generale – Editrice UTET Torino)

Poligonali in topografia

Lo schema della poligonale è un complesso di punti che viene rilevato ripetendo lo schema elementare del rilievo di un punto per coordinate polari, o in altre parole come una spezzata che congiunge i punti da rilevare e dì cui si misurano tutti gli angoli e tutti i lati partendo, necessariamente, da un punto e da una direzione noti.

Nella pratica operativa però la poligonale, chiamata *poligonale aperta,* ha sempre due punti noti alle estremità; lo schema più usuale è quello riportato in figura 1: la poligonale parte dal punto noto P_1 dove si misura l'angolo α_i che il primo lato forma con la direzione che congiunge tale punto con un altro punto noto A, e si chiude sul punto noto P_n, nel quale si misura anche l'angolo α_n che l'ultimo lato forma con la direzione che congiunge tale punto con il punto noto B.

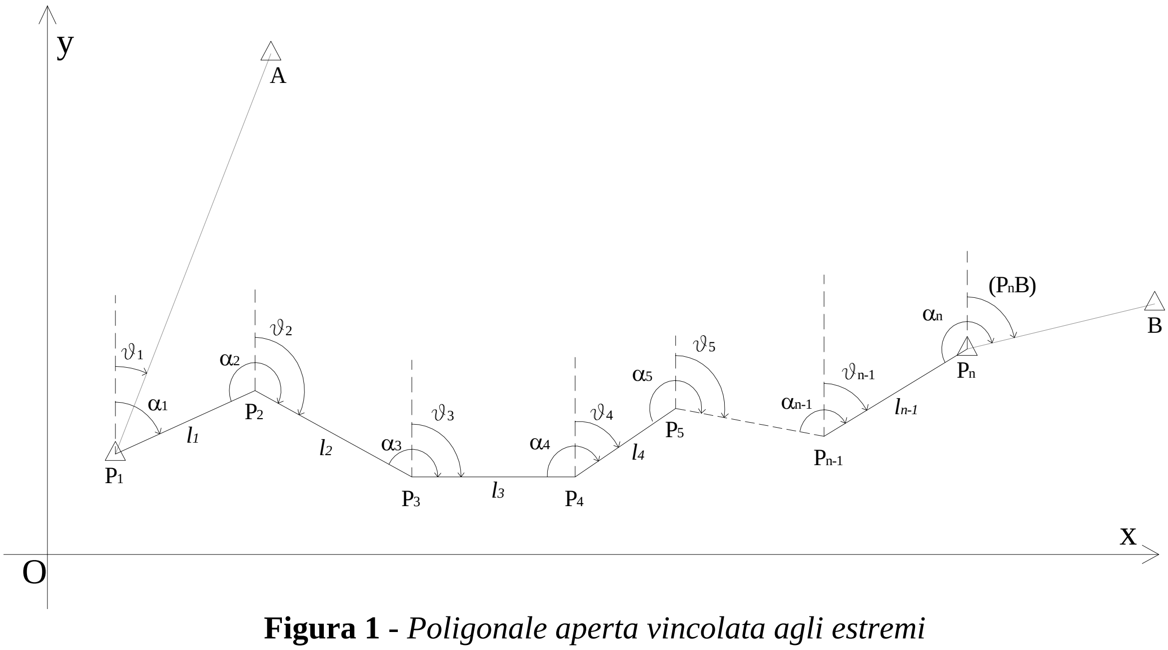

Figura 1 - *Poligonale aperta vincolata agli estremi*

Si hanno cosi tre misure esuberanti rispetto alle minime necessarie per rilevare i vertici della poligonale, e precisamente l'angolo α_{n-1} nell'ultimo vertice da rilevare P_{n-1} l'angolo α_n in P_n, e la lunghezza del lato $P_{n-1}P_n$ ed è quindi necessario eseguire un calcolo con compensazione; la poligonale è pertanto un'operazione *controllata* in quanto seguendo tale schema di rilievo vi è sempre la possibilità di controllare l'eventuale presenza di errori grossolani nelle misure e verificare la precisione dei risultati ottenuti; ciò si può ottenere anche se le misure esuberanti sono solo due o una, ad esempio anche omettendo la misura dell'angolo nel vertice noto P_1, e quella dell'angolo in P_n, l'operazione di rilievo risulterebbe sempre controllata e richiederebbe un calcolo con compensazione, ma ovviamente in base ai principi esposti noi, è consigliabile una riduzione del numero di misure.

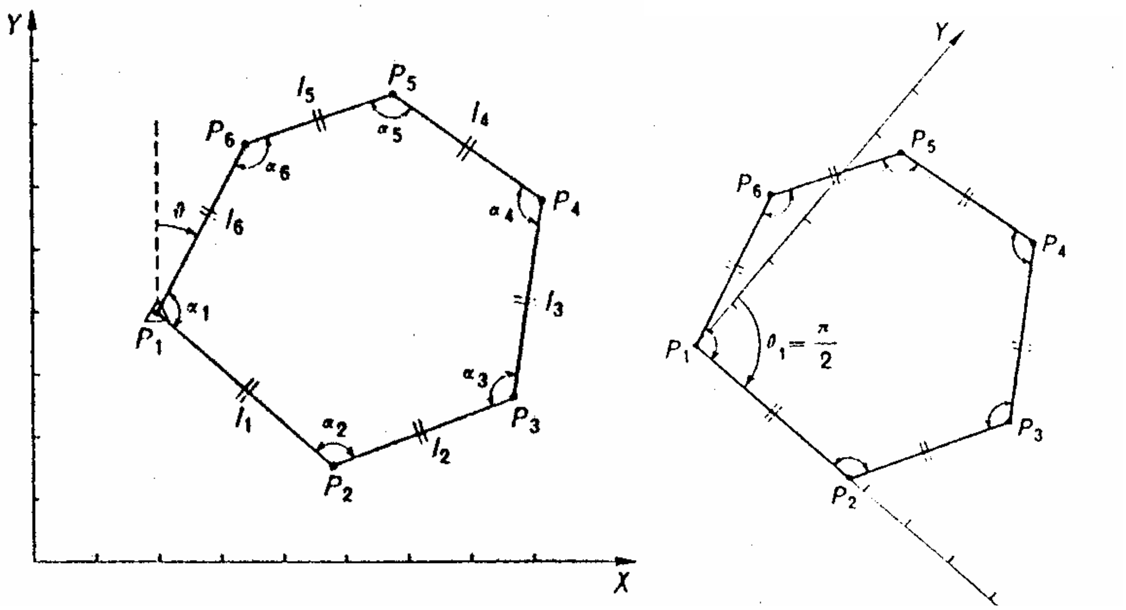

Figura 2 – *Poligonale chiusa orientata (sinistra) e non orientata (destra)*

La poligonale è *chiusa* se la spezzata si richiude sul punto di partenza; una poligonale chiusa può essere orientata, ovvero si possono calcolare le coordinate dei vertici rispetto al riferimento di una rete preesistente se uno dei vertici appartiene ad una rete preesistente o è ad essa collegato, e si sono eseguite misure angolari che permettono di ricavare l'angolo di direzione ϑ di uno dei due lati uscenti dal punto noto: altrimenti la poligonale chiusa è a sé stante e si assume per il calcolo delle coordinate un sistema di assi con l'origine su uno dei vertici e l'asse *X*. oppure *Y*, coincidente con uno dei lati uscenti da questo vertice.

Dovendo rilevare un complesso di punti d'inquadramento distribuiti su di una determinata area, si realizzano delle *reti di poligonali* che conviene organizzare in:

- *poligonalí principali,* che congiungono vertici di ordine superiore di coordinate note
- *poligonali ausiliarie* che congiungono vertici dì poligonali principali
- *poligonali secondarie*

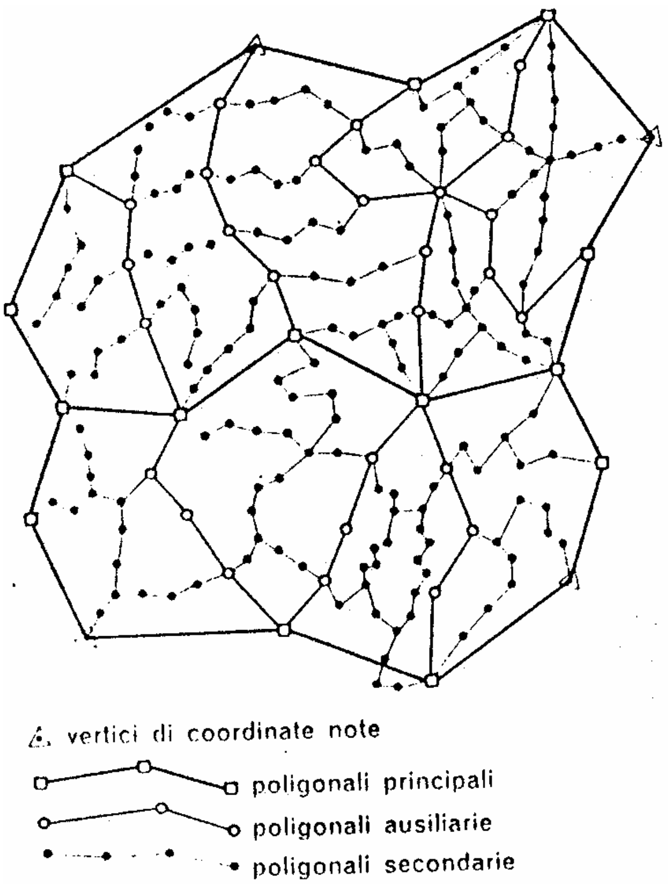

Figura 3 – *Schema strutturato di un rilievo per poligonali*

L'organizzazione, il rilievo ed il calcolo di una rete di poligonali si realizza cioè in maniera analoga a quanto già esposto in generale per le reti trigonometriche e si ottengono notevoli facilitazioni specie per quanto riguarda lo sviluppo dei calcoli.

La poligonale è un metodo di rilievo dì facile progettazione ed esecuzione in quanto la visibilità richiesta fra i punti da rilevare è relativa solo alle visuali fra ogni punto di stazione ed i vertici precedente e seguente; la disponibilità dei distanziometri ad onde

per la misura dei lati (ora integrati nella stazione totale) ha fatto si che un maggior numero di problemi di rilievo di reti di vertici trigonometrici possa essere risolto con vantaggio mediante l'uso di questo schema di rilievo. La misura degli angoli e delle distanze si può esegue con metodi e strumenti diversi, anche se per quesi ultimi i metodi stadimetrici risultano oramai obsoleti e sostituiti dall'uso delle stazioni totali.
La lunghezza di ogni lato viene misurata due volte con le stesse modalità poiché risulta agevole eseguire le misure di ambedue i lati uscenti da ogni stazione di misura. L'angolo che si misura in ogni vertice è quello che, stabilito il senso di avanzamento della poligonale, si ottiene facendo ruotare in senso orario il lato precedente sino a sovrapporsi al lato successivo.

Tipi di poligonali

Le ***poligonali geodetiche*** hanno lati di parecchi chilometri e uno sviluppo che può superare qualche centinaio di chilometri, possono costituire così reti trigonometriche di primo ordine, e possono essere impiegate per rilevare le posizioni di vertici delle reti di ordine inferiore. Si tenga comunque conto che tali reti sono oramai in gran parte sostituite da reti GPS. I lati delle poligonali geodetiche si rilevano con distanziometri ad onde di lunga portata e gli angoli con teodoliti di alta precisione.

Nel rilievo di poligonali geodetiche lunghe, costituite da un notevole numero di vertici e di non elevata precisione, può essere conveniente la misura diretta degli azimut dei lati mediante un teodolite giroscopico di buona precisione, poiché si può evitare il progressivo aumento dello s.q.m. dell'angolo di direzione di ogni lato; infatti se σ_α , è lo s.q.m. che caratterizza la misura di un angolo in un vertice della poligonale, l'angolo di direzione ϑ_n, del lato uscente dall'n-esimo vertice ha uno s.q.m. pari a

$$\sigma_\vartheta = \sqrt{n} \cdot \sigma_\alpha$$

mentre l'impiego di un teodolite giroscopico, che consente la misura dell'azimut con uno s.q.m. σ_α , fa si che ogni angolo di direzione dei lati della poligonale sia caratterizzato da uno s.q.m. costante e pari a σ_α; è quindi semplice valutare la convenienza o meno di impiegare tale strumento.
In operazioni di una certa importanza per avere una sicura valutazione globale si può ricorrere ad un calcolo preventivo della precisione dei vertici nelle due ipotesi di misura

di angoli e di misura di azimut, ed esaminare come variano gli ellissi d'errore standard. Nel rilievo dì poligonali geodetiche di precisione, oltre alla misura degli angoli, si possono effettuare le misure degli azimut astronomici di alcuni lati distribuiti lungo la poligonale, che introdotti nel calcolo di compensazione possono migliorare sensibilmente la precisione.

Le ***poligonali topografiche*** hanno lati compresi fra qualche centinaio di metri e circa 1,5 km, con uno sviluppo massimo di qualche decina di chilometri; si rilevano misurando i lati con distanziometri ad onde di ridotta portata (v. Distomat, Zeiss SMII) e gli angoli con teodoliti di precisione ($3^{cc} \sim 5^{cc}$). Si possono impiegare:

a) per costituire reti di punti trigonometrici di ordine inferiore;
b) per costituire reti di primo ordine relative a rilievi cartografico a grande scala;
c) per rilevare i punti fotografici di appoggio nel rilievo fotogrammetrico;
d) per costituire reti di inquadramento per il tracciamento di opere di ingegneria specialmente adatte per strade, canali, ferrovie.

Solitamente si impiegano stazioni totali e segnali sfilabili dalla base, allo scopo di rendere più veloci e accurate le operazioni e perché, stante la notevole lunghezza dei lati è richiesta una elevata precisione di centratura degli strumenti e dei segnali sui punti segnalizzati sul terreno.

Le ***poligonali ordinarie*** hanno uno sviluppo massimo di 3~4 km con lati compresi fra 50 e 300 m; sono essenzialmente impiegate per costituire le reti di *dettaglio* ovvero per rilevare quel complesso di punti su cui si effettuano le stazioni per il rilievo di dettaglio, e per le quali è richiesta una precisione che sia semplicemente adeguata alla scala della carta da costruire.

Se la poligonale ha uno sviluppo superiore alla norma può essere vantaggiosamente impiegato un teodolite-bussola, che al momento però non risulta più in produzione (vedi ad esempio il WILD T0).

Le ***poligonali ordinarie di precisione*** hanno lati di 50 ~ 100 m e un limitato sviluppo, i lati si misurano con stazioni totali. Queste poligonali possono servire per inquadrare piccoli rilievi cartografici a grande scala (1:500) e anche per lavori in galleria, per determinare superfici di appezzamenti con buona precisione e in operazioni di rilievo catastale urbano. Lo strumento deve essere in grado di misurare le direzioni con accuratezze dell'ordine di $5^{cc} \sim 10^{cc}$ (vedi norme DIN18723).

Da puntualizzare il caso particolare di poligonali di precisione con lati molto corti; il rilievo della poligonale rende necessario il successivo centramento della stazione totale e dei segnali di collimazione sui vertici da rilevare; sostituendo su un vertice la stazione totale al segnale, o viceversa, si commette sempre un errore di centramento più o meno elevato a seconda della strumentazione usata per la messa in stazione; un'eccentricità del posizionamento dello strumento o del segnale o di entrambi rispetto alle posizioni definite nei precedenti centramenti comporta un errore nella misura dell'angolo. Nel caso di poligonali di precisione aventi i lati molto corti è dunque necessario utilizzare l'approccio a centramento forzato.

Il procedimento di misura è pertanto il seguente: sui tre vertici *i-1*, *i* ed *i+1* si pongono i treppiedi con le basi e si effettua il centramento sul segnale a terra; in corrispondenza dell'(*i*-1)-*ma* e dell'(*i*+1)-*ma* base si infilano i segnali, mentre la stazione totale si infila sulla *i-ma;* effettuata la misura dell'angolo tra le due direzioni nel vertice *i* si porta e si centra il primo treppiede con la base sul vertice *i*+2, si infila il teodolite nella (*i* +1)-*ma* base, ed il segnale sull' *i-ma*, e così via per tutti i vertici della poligonale; risulta quindi che la poligonale effettivamente rilevata è quella che congiunge i centri delle basi; gli angoli di questa poligonale non sono affetti da errori di eccentricità e la poligonale segnalizzata sul terreno differisce da quella rilevata solo per gli errori commessi nel centrare le basi sui segnali a terra; in altre parole gli errori di centramento del teodolite e dei segnali rispetto ai punti segnalizzati sul terreno rimangono localizzati su ogni vertice e noti producono inaccettabili errori sugli angoli; sulle basi può essere infilata anche la stadia orizzontale per la rnisura delle distanze, od il piombino ottico per ridurre al disotto del millimetro gli errori di centramento sui punti segnalizzati sul terreno. Tale approccio va usato anche negli altri tipi di poligonale tutte le volte che un lato risulta, per varie ragioni, così corto da far temere l'influenza dell'errore di eccentricità.

Le ***poligonali speditive*** sono impiegate per rilievi geologici, per rilievi di grotte, e comunque per rilievi a piccola scala; gli angoli si misurano con una bussola topografica, ed i lati con un telemetro. Tale approccio risulta attualmente abbastanza in disuso.

Calcolo e compensazione di una poligonale. Compensazione empirica.

Considerazioni generali.

Le poligonali, come tutte le operazioni che conducono alla determinazione delle coordinate planimetriche di vertici trigonometrici, possono essere calcolate e compensate con gli algoritmi e le procedure rigorose a minimi quadrati, e in tal modo conviene operare nel caso di poligonali geodetiche, oppure, come avviene per la maggior parte delle poligonali, la compensazione avviene in maniera empirica specie se si tratta di poligonali ordinarie costituenti una rete di dettaglio.

Le variazioni che si hanno nelle coordinate dei vertici impiegando il metodo rigoroso e quello empirico non sono infatti di entità tale da giustificare il maggiore impegno che in sede di calcolo è richiesta dalla compensazione rigorosa. Si tenga inoltre in conto che spesso l'approccio rigoroso ai minimi quadrati richiede un pre-trattamento che permetta di individuare con rapidità la presenza di eventuali errori grossolani e di stimare, prima del procedimento di compensazione rigoroso, il valore approssimato delle incognite.

Le poligonali, eccetto quelle chiuse e limitate, si calcolano e si compensano sul piano della rappresentazione conforme correggendo le misure dei lati; tranne che per le poligonali geodetiche i cui lati hanno lunghezza di parecchi chilometri, non si apportano correzioni agli angoli, dato che al massimo queste raggiungono il valore di 0,2" per un lato lungo un chilometro, e sono pari così a una piccola frazione dello s.q.m. dell'angolo; per la stessa ragione non si apportano correzioni alle distanze misurate nel caso di poligonali ordinarie: si avrebbe al massimo una correzione di 4 cm su 100 m laddove lo s.q.m. di misura è di ± 10-15 cm; da tenere presente inoltre che le poligonali aperte sono riferite a vertici di cui sono note le coordinate cartografìche e che pertanto, anche se le correzioni di deformazione lineare non venissero apportate, si avrebbe comunque nella fase della compensazione una correzione proporzionale su tutte le proiezioni dei lati sugli assi coordinati che praticamente è equivalente alla correzione per la deformazione lineare.

Compensazione empirica – Poligonale aperta

La *compensazione empirica* di una poligonale esegue come viene in seguito specificato. Con riferimento alla figura 1, note le coordinate dei punti P_1, A, P_n e B si calcolano gli angoli di direzione (P_1A) e $(P_n B)$ con le formule

$$\tan(P_1A) = \frac{X_A - X_1}{Y_A - Y_1} \qquad \tan(P_nB) = \frac{X_B - X_n}{Y_B - Y_n}$$

sì calcolano quindi gli angoli di direzione ϑ_i dei lati della poligonale:

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= (P_1P_2) = (P_1A) + \alpha_1 \\
\theta_2 &= (P_2P_3) = \theta_1 \pm \pi + \alpha_2 \\
\theta_3 &= (P_3P_4) = \theta_2 \pm \pi + \alpha_3 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\theta_{n-1} &= (P_{n-1}, P_n) = \theta_{n-2} \pm \pi + \alpha_{n-1} \\
\theta_n &= (P_nB) = \theta_{n-1} \pm \pi + \alpha_n
\end{aligned}$$

Sommando i primi e i secondi membri di queste relazioni, uguagliando le somme e semplificando si ottiene

$$(P_nB) = (P_1A) + \sum_1^n{}_i \, \alpha_i + K\pi$$

dove *K* è un numero intero facilmente individuabile in sede di calcolo.
Questa relazione si può scrivere anche nella forma seguente

$$\sum_1^n \alpha_i + (P_1A) - (P_nB) + K\,200^g = 0$$

in modo da evidenziare la condizione angolare che gli angoli misurati devono soddisfare; naturalmente introducendo nell'equazione precedente gli angoli misurati ed i valori degli angoli di direzione si ottiene un *errore di chiusura angolare Δ* che rappresenta, supponendo che le coordinate dei punti P_1, A, P_n, B siano prive di errore, l'effetto globale degli errori accidentali di misura degli angoli.

L'errore di chiusura Δ è una quantità aleatoria il cui s.q.m. (scarto quadratico medio) σ_Δ è pari a $\sqrt{n}$ volte lo s.q.m. σ_α della misura di un singolo angolo.

In assenza di errori grossolani il valore di Δ dovrà essere contenuto entro i limiti di

$-3\sigma_\alpha\sqrt{n}$ *e* $+3\sigma_\alpha\sqrt{n}$; la tolleranza t_Δ per l'errore di chiusura angolare si assume pertanto in valore assoluto pari a:

$$t_\Delta = 3\,\sigma_\alpha\sqrt{n}$$

Il valore di σ_α dipende ovviamente dallo strumento usato, dai segnali usati, dal metodo usato per la misura, dalla morfologia del terreno ecc.

Cosi ad esempio si può assumere $\sigma_\alpha = \pm\, 5^{cc}$ per una poligonale geodetica rilevata con teodolite di alta precisione, $\sigma_\alpha = \pm\, 10^{cc}$ per una poligonale topografica rilevata con un teodolite da 5^{cc}, $\sigma_\alpha = \pm\, 1^{c}$ se le misure sono eseguite con un teodolite da $0{,}5^{c}$.

D'altra parte se la tolleranza t_Δ è prefissata, come in genere avviene negli appalti per i rilievi, è opportuno impiegare uno strumento e un metodo di misura degli angoli, che nelle condizioni operative effettive diano luogo ad uno s.q.m. nella misura di un angolo pari a $t_\Delta/3\sqrt{n}$.

Se l'errore di chiusura angolare è inferiore o uguale alla tolleranza si compensano empiricamente gli angoli misurati apportando ad ognuno di essi una correzione pari a $-\Delta/n$.

Eseguita la compensazione degli angoli si ricalcolano i valori degli *angoli di direzione compensati* ϑ_i^* .

Si calcolano quindi le coordinate dei vertici e si ottiene:

$$\begin{array}{ll}
X_2 = X_1 + l_1 \operatorname{sen} \theta_1^* & Y_2 = Y_1 + l_1 \cos \theta_1^* \\
X_3 = X_2 + l_2 \operatorname{sen} \theta_2^* & Y_3 = Y_2 + l_2 \cos \theta_2^* \\
\cdots & \cdots \\
X_n = X_{n-1} + l_{n-1} \operatorname{sen} \theta_{n-1}^* & Y_n = Y_{n-1} + l_{n-1} \cos \theta_{n-1}^*
\end{array}$$

Sommando i primi membri ed i secondi membri di queste relazioni ed uguagliando si ha

$$X_n = X_1 + \sum_1^{n-1}{}_i\, l_i \operatorname{sen} \theta_i^* \qquad Y_n = Y_1 + \sum_1^{n-1}{}_i\, l_i \cos \theta_i^*$$

da cui, essendo X_1, Y_1, X_n, Y_n, noti e supposti privi di errore, si traggono le equazioni di condizione

$$\sum_1^{n-1} l_i \operatorname{sen} \theta_i^* - (X_n - X_1) = 0 \quad , \quad \sum_1^{n-1} l_i \cos \theta_i^* - (Y_n - Y_1) = 0$$

Queste relazioni insieme alla condizione di chiusura angolare costituiscono le tre condizioni che gli angoli e distanze misurate devono soddisfare.

Se si inseriscono i valori compensati degli angoli di direzione ed i valori misurati dei lati si ricavano pertanto gli *errori di chiusura*

$$\Delta X = \sum_1^{n-1} l_i \operatorname{sen} \theta_i^* - (X_n - X_1) \quad , \quad \Delta Y = \sum_1^{n-1} l_i \cos \theta_i^* - (Y_n - Y_1)$$

e la quantità

$$\Delta l = (\Delta X^2 + \Delta Y^2)^{\frac{1}{2}}$$

che si chiama *errore di chiusura laterale* della poligonale; Δl è indipendente dall'orientamento degli assi cartesiani perché esprime la distanza fra la posizione calcolata di P_n e la posizione nota.

L'errore di chiusura Δl deve risultare inferiore o uguale ad una tolleranza t_l che tiene conto essenzialmente della maniera con cui si sono misurate le lunghezze dei lati (in effetti a formare l'errore di chiusura Δl concorrono anche gli errori degli angoli misurati, ma in una compensazione empirica non si tiene conto di ciò).

La tolleranza deve tenere conto sia degli s.q.m. che caratterizzano le misure dei lati, ovvero degli errori accidentali di misura, sia degli eventuali errori sistematici. Considerando una spezzata pressoché rettilinea di *n* lati di lunghezza mediamente uguale ad *l*, svolgentesi quindi per una lunghezza *L=nl*, denotato con σ_l lo s.q.m. della misura di un lato si ha

$$\sigma_L^2 = n\sigma_l^2 = \frac{L}{l}\sigma_l^2$$

ovvero

$$\sigma_L = \frac{\sigma_l}{\sqrt{l}}\sqrt{L}$$

e si può constatare che lo s.q.m. totale σ_l cresce proporzionalmente alla radice quadrata della lunghezza totale L; per tenere conto degli errori accidentali di misura dei lati la formula della tolleranza deve pertanto contenere un termine del tipo $p\sqrt{L}$, dove con L si intende lo sviluppo complessivo della poligonale, ed assumere per p un valore dell'ordine di $3\frac{\sigma_l}{\sqrt{l}}$.

D'altra parte un errore sistematico nella misura dei lati dà un effetto che si può ritenere proporzionale alla distanza per cui una formula per la tolleranza laterale della poligonale può assumersi del tipo

$$t_l = p\sqrt{L} + qL$$

con $L = \sum_{1}^{n-1} l_i$ e dove q rappresenta l'errore sistematico riferito all'unità usata per esprimere L.

Per tenere conto dell'influenza degli s.q.m. degli angoli nella formazione di Δl si potrebbe introdurre nella formula un terzo termine funzionale del numero di angoli misurati.

Il Catasto Italiano per le poligonali ordinarie rilevate con una stazione totale da 1^c prevede:

- p = 0,015 per terreni facili
- p = 0,020 per terreni medi
- p = 0,025 per terreni difficili

e q=0,0008.

Usando stazioni totali si può considerare l'errore di q come trascurabile.

Da notare che le tolleranze possono essere stabilite con sicurezza quando esiste una larga esperienza sui vari metodi impiegati; da notare inoltre che per le grandi poligonali geodetiche e per le poligonali di precisione il concetto di tolleranza ha poco senso in quanto il calcolo e la compensazione vengono effettuati con metodi rigorosi e gli errori di chiusura sono molto contenuti.

Verificato che l'errore di chiusura Δl è inferiore alla tolleranza, per eliminare le discrepanze fra le coordinate calcolate e le coordinate note del punto Pn si distribuiscono le *correzioni* $-\Delta X$ e $-\Delta Y$ tra le proiezioni dei lati sugli assi coordinati; la ripartizione può avvenire proporzionalmente alla lunghezza di ogni lato, si calcolano cioè le *correzioni unitarie*

$$u_X = -\frac{\Delta X}{\sum_1^{n-1} {}_i l_i}, \qquad u_Y = -\frac{\Delta Y}{\sum_1^{n-1} {}_i l_i}$$

e si ricavano le proiezioni compensate dei lati $(i_i sen\vartheta_i^*)_c$, $(l_i \cos\vartheta_i^*)_c$ con le

$$(l_i \operatorname{sen} \theta_i^*)_c = l_i \operatorname{sen} \theta_i^* + u_X\, l_i,$$

$$(l_i \cos \theta_i^*)_c = l_i \cos \theta_i^* + u_Y\, l_i$$

Con le proiezioni compensate si calcolano infine per somma le coordinate compensate dei vertici.

La distribuzione delle correzioni si può anche effettuare proporzionalmente alle proiezioni dei lati; si ha allora

$$u_X = -\frac{\Delta X}{\sum_1^{n-1} {}_i \left| l_i \operatorname{sen} \theta_i^* \right|} \qquad u_Y = -\frac{\Delta Y}{\sum_1^{n-1} {}_i \left| l_i \cos \theta_i^* \right|}$$

e

$$(l_i \operatorname{sen} \theta_i^*)_c = l_i \operatorname{sen} \theta_i^* + u_X \left| l_i \operatorname{sen} \theta_i^* \right|,$$

$$(l_i \cos \theta_i^*)_c = l_i \cos \theta_i^* + u_Y \left| l_i \cos \theta_i^* \right|$$

Dato il carattere empirico della compensazione non ha rilevanza il discutere se sia più valido un metodo di distribuzione o l'altro.

Il calcolo e la compensazione di una poligonale si organizza su un modulo del tipo di quello riportato nell'esempio - che si riferisce a una poligonale di 7 vertici congiungente due vertici di coordinate note P_1 e P_9 - ed utilizza per l'orientamento e la verifica angolare le direzioni note P_1A e P_9B.

Poligonale chiusa

Dal punto di vista del calcolo e della compensazione la *poligonale chiusa* è un caso particolare di una *poligonale aperta* in cui l'ultimo vertice coincide con il primo. La condizione a cui devono soddisfare gli angoli α_i misurati si deriva immediatamente dalla relazione che lega la somma degli angoli interni di un poligono di *n* lati.

$$\sum_{1}^{n} {}_i \, \alpha_i - (n-2)\, 200^g = 0$$

Introdotti in questa relazione i valori degli angoli misurati si ottiene l'errore di chiusura angolare

$$\Delta = \sum_{1}^{n} {}_i \, \alpha_i - (n-2)\, 200^g$$

che si distribuisce, cambiato di segno, in parti uguali fra tutti gli angoli se, ovviamente, è inferiore alla tolleranza.

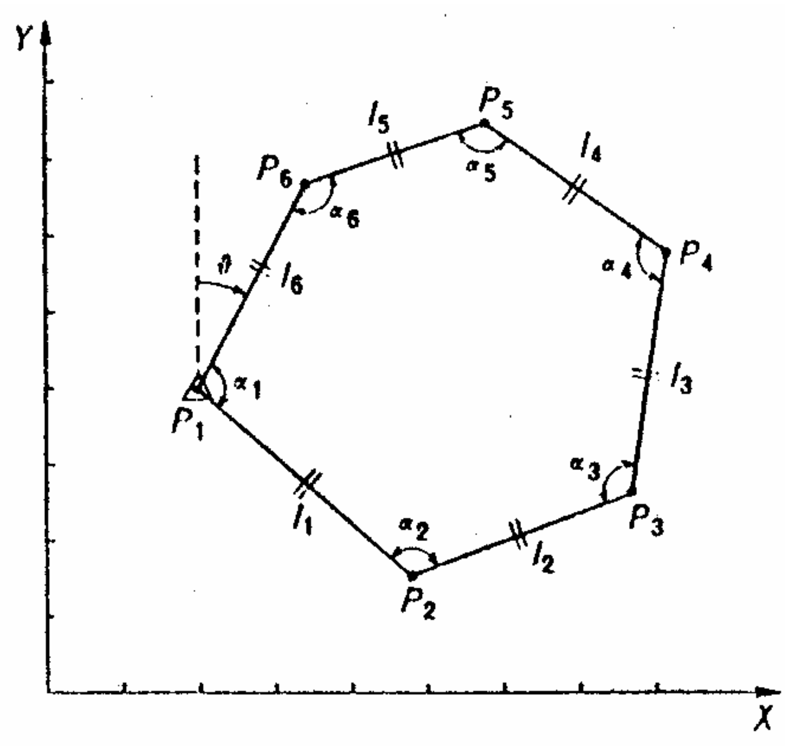

Figura 4 - *Poligonale chiusa*

Assunto un sistema di assi con l'origine coincidente con il punto P_1 e l'asse *X* coincidente cori il lato P_1P_2, si ha $\vartheta_1 = 100^g$ e quindi con le formule prima introdotte tutti gli altri angoli di direzione ϑ_i^*, che risultano già compensati dato che gli angoli sono già tali.

Dato che $X_n = X_i$ e $Y_n = Y_i$ le condizioni laterali si esprimono come segue

$$\sum_1^n {}_i\, l_i \operatorname{sen} \theta_i^* = 0 \qquad \sum_1^n {}_i\, l_i \cos \theta_i^* = 0$$

ovvero esprimono che la somma delle proiezioni dei lati di un poligono chiuso, su ciascuno dei due assi coordinati, deve essere nulla. Gli errori di chiusura ΔX e ΔY si ricavano introducendo i valori degli angoli di direzione compensati e i valori dei lati misurati

$$\Delta X = \sum_1^n {}_i\, l_i \operatorname{sen} \theta_i^* \qquad \Delta Y = \sum_1^n {}_i\, l_i \cos \theta_i^*$$

La correzione $-\Delta X$ si distribuisce su tutte le proiezioni dei lati come nel caso della poligonale aperta, mentre la correzione $-\Delta Y$ si distribuisce su tutte le proiezioni tranne che sulla prima, allo scopo di mantenere il punto P_2, sull'asse delle ascisse; le correzioni unitarie si calcolano cioè con le

$$u_X = -\frac{\Delta X}{\sum_1^n {}_i l_i}, \qquad u_Y = -\frac{\Delta Y}{\sum_1^n {}_i l_i - l_1}$$

e non si apporta nessuna correzione alla proiezione del primo lato sull'asse Y.